https://telegram.me/konkooooriha https://telegram.me/konkooooriha

جزوه‌ی کلاس حضوری

مسئول (۱)

دبیر محترم دانشجویان امور عمومی

لطفاً کلی و تعلیم نمایید.

امور عمومی

به اطلاع می‌رساند کلاس با لوله‌ی آزمایش در آزمایشگاه شیمی برگزار خواهد شد.

۹۲/۱۲/۶

https://telegram.me/konkooooriha https://telegram.me/konkooooriha

رامی - علی

https://telegram.me/konkooooriha https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

مشتق (۱)

روابط اساسی مشتق‌گیری:

① $y=c \longrightarrow y'=0$

② $y=x^n \longrightarrow y'=nx^{n-1}$ (به عامل ضریب ثابت کاری نداره و مشتق می‌گیریم)

مثال: $y=x^5 \longrightarrow y'=5x^4$

$y=x^4+5x^3+2x^2-7x+1$

$\longrightarrow y'=4x^3+5(3x^2)+2(2x)-7$

$=4x^3+15x^2+4x-7$

③ $y=\sqrt{x} \longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

④ $y=\sqrt[n]{x^m} \longrightarrow y'=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

مثال: $y=\sqrt[7]{x^3}$ ⟵ ⑤ $y'=\frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}$

⑤ $y=x^{\frac{3}{7}} \longrightarrow y'=\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}$

$\frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}=\frac{3}{7x^{\frac{4}{7}}}$

$y=\frac{x^2}{9\sqrt{x}}=\sqrt[5]{x^9} \longrightarrow y'=\frac{9}{5\sqrt[5]{x^4}}=\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$

⑥ $y=\frac{k}{x^n} \longrightarrow y'=\frac{-kn}{x^{n+1}}$

مثال: $y=\frac{2}{x^3}$ ⑥ $\longrightarrow y'=\frac{-6}{x^4}$

⑤ $y=2x^{-3} \longrightarrow y'=-6x^{-4}=\frac{-6}{x^4}$

$y=\frac{1}{x} \longrightarrow y'=\frac{-1}{x^2}$ $\quad y=\frac{3}{x} \longrightarrow y'=\frac{-3}{x^2}$

$y=\frac{k}{x} \longrightarrow y'=\frac{-k}{x^2}$

⑨ $y=u.v \longrightarrow y'=u'v+v'u$

مثال: $y=x^2(x^3+1) \longrightarrow y'=2x(x^3+1)+3x^2(x^2)$

⑦ $y=\frac{u}{v} \longrightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

مثال: $y=\frac{x^2+1}{x} \longrightarrow y'=\frac{2x(x)-(x^2+1)}{x^2}$

نکته: $y=\frac{1}{u} \longrightarrow y'=\frac{-u'}{u^2}$ مثال: $y=\frac{1}{x+4} \longrightarrow y'=\frac{-1}{(x+4)^2}$

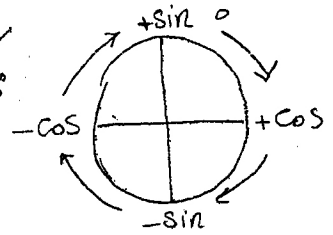
⑧ $y=\frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

(مخرج صورت امید)

مثال: $y=\frac{cx+2}{3x-1} \longrightarrow y'=\frac{-7}{(3x-1)^2}$

⑨ مشتق توابع مثلثاتی

نکته:



$y=\sin x \longrightarrow y'=\cos x$

$y=\cos x \longrightarrow y'=-\sin x$

$y=\tan x \longrightarrow y'=1+\tan^2 x$

$y=\cot x \longrightarrow y'=-(1+\cot^2 x)$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی و مشتق توابع معکوس مثلثاتی بعداً بررسی خواهد شد.

تکنیک های مشتق گیری:

① تکنیک مشتق گیری از توابع ترکیبی (قاعده زنجیری - تکنیک کاهای پیوسته ای):

اولویت در مشتق گیری با توان است

* دقت شود که را دیکال خود نوعی توان است

*$y=\sin^{\frac{1}{2}}\left(\tan\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{5}}\right)$

$y'=\frac{1}{2}\sin^{-\frac{1}{2}}\left(\tan\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{5}}\right)\times\cos\left(\tan\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{5}}\right)\times$

$\left(1+\tan^2\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{5}}\right)\times\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{5}\right)^2}}\times\frac{1}{5}\times 2x$

*$y=\sin^{\frac{1}{7}}\left(\cos^{\frac{3}{4}}\left(\cot\left(\sqrt[5]{\frac{x^5}{2}}\right)\right)\right)$

$y'=\frac{1}{7}\sin^{-\frac{6}{7}}\left(\cos^{\frac{3}{4}}\left(\cot\left(\sqrt[5]{\frac{x^5}{2}}\right)\right)\right)\times\cos\left(\cos^{\frac{3}{4}}\left(\cot\left(\sqrt[5]{\frac{x^5}{2}}\right)\right)\right)\times$

$\frac{3}{4}\cos^{-\frac{1}{4}}\left(\cot\left(\sqrt[5]{\frac{x^5}{2}}\right)\right)\times-\sin\left(\cot\left(\sqrt[5]{\frac{x^5}{2}}\right)\right)\times$

$-\left(1+\cot^2\sqrt[5]{\frac{x^3}{2}}\right)\times\frac{3}{5\sqrt[5]{\frac{x^2}{2}}}$

*$y=3\sin^{\frac{1}{5}}\left(\frac{2x}{3}\right)$

$y'=\frac{3}{5}\times 3\sin^{-\frac{4}{5}}\left(\frac{2x}{3}\right)\times\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\times\frac{2}{3}$

*$y=3\cos^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)$

$y'=3\times\frac{1}{4}\cos^{-\frac{3}{4}}\left(\sqrt{x}\right)\times-\sin\sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

$$* y = \tan(\cot x)$$

$$y' = -(1+\tan^2(\cot x)) \times (1+\cot^2 x)$$

$$* y = (4x^3 + 2\sqrt{x} + 7)^4$$

$$y' = 4(4x^3+2\sqrt{x}+7)^3 \times \left(12x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$* y = \underbrace{(x^2-1)^3}_{\text{عامل اول}} \underbrace{(x^2+1)^4}_{\text{عامل دوم}} \rightarrow y' = \text{مشتق اول} \times \text{عامل دوم} + \text{مشتق دوم} \times \text{عامل اول}$$

$$y' = 3(x^2-1)^2 \times 2x \times (x^2+1)^4 + 4(x^2+1)^3 \times 2x \times (x^2-1)^3$$

$$= 2x(x^2-1)^2(x^2+1)^3\left(3(x^2+1)+4(x^2-1)\right)$$

$$= 2x(x^2-1)^2(x^2+1)^3(3x^2+3+4x^2-4)$$

$$= 2x(x^2-1)^2(x^2+1)^3(7x^2-1)$$

$$* y = \sin^5(\tan\sqrt{x^4+1})$$

$$5\sin^4(\tan\sqrt{x^4+1}) \times \cos(\tan\sqrt{x^4+1}) \times (1+\tan^2\sqrt{x^4+1}) \times \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}} \times 4x^3$$

$$* y = \frac{\sin 9x}{1} \quad \frac{}{2}$$

$$y' = \cos 9x \times 9$$

$$* y = \frac{\cot\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1} \quad \frac{}{2}$$

$$y' = -\left(1+\cot^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \times -\frac{\pi}{x^2}$$

$$* y = \frac{\sin}{1}\left(\frac{\sin}{2}(\cos x)\right) \quad \frac{}{3}$$

$$y' = \cos(\sin(\cos 9x)) \times \cos(\cos x) \times -\sin x$$

$$* y = 2\tan^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \frac{}{3}$$

$$y' = 2 \times \frac{1}{2}\tan^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(1+\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times -\frac{1}{x^2}$$

$$* y = 2\cot^{\frac{1}{3}}(\sin x) \quad \frac{}{3}$$

$$y' = 2 \times \frac{1}{3}\cot^{-\frac{2}{3}}(\sin x) \times \left[-\left(1+\cot^2(\sin x)\right)\right] \times \cos x$$

https://telegram.me/konkooooriha

* نکته: در حین مواردی (مشتق گیری از حاصلضرب دو تابع) حتماً توان هرکدام از دو تابع در حین مشتق گیری کمتر از توان اصلی آن ها خواهد بود (کمتر هر اسطی)

$y=(x^2-1)^3(x^2+1)^4$

در دفترتان حتماً بنویسید به ما کمک کند

$y'=(x^2-1)^2(x^2+1)^3$ ← در مورد درس بعدی این عامل بعداً صفر خواهد شد

* $y=(x^2-1)(x^2+1)^4$

$y'=(x^2-1)^0(x^2+1)^3$

یعنی اگر یک عامل دارای توان 1 باشد اصلاً در مشتق ظاهر می شود

* $y=\frac{3x^2+4}{2x^2-1}$

$y=\frac{au+b}{cu+d}$

$y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$

$y'=\frac{-11(2x)}{(2x^2-1)^2}$

* $y=\frac{2\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}-1}$

$y'=\frac{-5}{(3\sqrt{x}-1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y=3\sin^5(2x)$

$y'=3(5\sin^4(2x)\times\cos(2x)\times 2$

* $y=\sin^3(\sqrt{x})$

$y=3\cos^4(\sqrt{x})$

$y'=3\left(4\cos^3(\sqrt{x})\right)\times\left[-\sin(\sqrt{x})\right]\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y'=3\sin^2(\sqrt{x})\times\cos\sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال‌ها: عدد مشتق‌پذیری بیابید:

$y'\Big|_{x=\frac{\pi^2}{9}}=?$

$=\frac{27}{14\pi}$

* $f'(\frac{1}{2})=3$

مشتق $f(\cos^2 x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=?$

$2\cos x(-\sin x)f'(\cos^2 x)$

$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times-\frac{\sqrt{2}}{2}\times f'(\frac{1}{2})=-3$

* $f(x)\sin x + f(-x)\cos x = x$

از طرفین مشتق می‌گیریم ← $f'(0) = ?$ ، $x=0 \longrightarrow 0 + f(0) = 0$ ⇒ $f(0) = 0$

$f'(x)\sin x + f(x)\cos x + (-f'(-x)\cos x) + (-f(-x)\sin x) = 1$

$x=0$

$0 + f(0) - f'(0) + 0 = 1 \longrightarrow f'(0) = -1$

* $\tan x + \cot x$ برابر $y = f(\tan x)$ آن مشتق تابع

مشتق تابع $y = f(\sin x)$ کدام است؟

$y' = (1+\tan^2 x) f'(\tan x) = \tan x + \cot x$

$f'(\tan x) = \dfrac{\tan x + \cot x}{1+\tan^2 x}$

$\tan x = t$ $\quad \cot x = \dfrac{1}{t}$ با جایگذاری $\cot x$ و $\tan x$

$f'(t) = \dfrac{t + \frac{1}{t}}{1+t^2} = \dfrac{t^2+1}{t+t^3} = \dfrac{t^2+1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t}$

* $f(x) = g(x^3+2x)$ $\quad g'(2) = 4$

$f'(1) = ?$

$f'(x) = (3x^2+2) \times g'(x^3+2x)$

$x=1$

$f'(1) = 5\, g'(3) = 5 \times 4 = 20$

* $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+2}$

مشتق تابع $f(x f(x))$ در نقطه $x=2$ = ?

$y = f(x f(x))$

$y' = f'(x f(x)) \times (f(x) + x f'(x))$

$y'(2) = f'(2 f(2)) \times (f(2) + 2 f'(2))$

$f(2) = -\frac{1}{2}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x+2}} \longrightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}$

$y'(2) = (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) f'(2x - \frac{1}{2}) = -f'(-1) = \frac{1}{2}$

https://telegram.me/konkooooriha

۷۶

$y = f(\sin x)$

$y' = \cos x f'(\sin x) = \cos x \times \frac{1}{\sin x} = \cot x$

* $f(x^2+1) = g(x^3-4)$

تست ۰ $\begin{cases} g'(4)=12 \\ f'(0)=? \end{cases}$

$2x f'(x^2+1) = 3x^2 g'(x^3-4)$

$x=2$

$4f'(0) = 12\frac{g'(4)}{12} \longrightarrow f'(0) = 36$

* $f(\sin^2 x) = g(\tan x + 3)$

تست ۰ $\begin{cases} g'(4)=2 \\ f'(\frac{1}{4})=? \end{cases}$

$2\sin x\cos x f'(\sin^2 x) = (1+\tan^2 x) g'(\tan x+3)$

$x = \frac{\pi}{6}$

$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} f'(\frac{1}{4}) = 2g'(4) \longrightarrow f'(\frac{1}{4}) = 4$

* $f(x) = f(3x - 4f(x))$

تست ۰ $\begin{cases} f(2)=1 \\ f'(2)=? \quad (f'(2)\neq 0) \end{cases}$

$f'(x) = (3-4f'(x))f'(3x-4f(x))$

$x=2$

$f'(2) = (3-4f'(2))f'(2)$

$1 = 3 - 4f'(2)$

$4f'(2) = 2 \longrightarrow \boxed{f'(2) = \frac{1}{2}}$

$\boxed{f'(2) = 0}$

* $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

$(f\circ f(x))' \longrightarrow$ مشتق ترکیب

$f: f(x) \longrightarrow$ درجه ۳

$g\circ g(x) \longrightarrow x^2$ درجه ۲

$(g\circ g(x))' \longrightarrow x^{2-1}$

① تست ۰ درجه ۵ $\longrightarrow f'(f(x))\times f'(x)$

$12 + 3 = 15$

⑤ تست ۰ $\longrightarrow \underbrace{f\circ f}_{16} \longrightarrow (f\circ f(x))'$

16

https://telegram.me/konkooooriha

مشق

* $f\left(\sqrt[3]{9x+2}\right)$ در $x=1$ برابر -2 است، شیب خط تماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول 2 کدام است؟

$$f'\left(\sqrt[3]{9x+2}\right)\times\frac{1}{3\sqrt[3]{(9x+2)^2}}\times 9\Big|_{x=1} \longrightarrow f'(2)\times\frac{9}{12}=-2$$

نکته:
$y=\sqrt{u} \longrightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\sqrt[n]{u^m} \longrightarrow y'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$
$y=\sqrt{x^2-x+1} \longrightarrow y'=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$
$y=\sqrt[5]{(x^2-2x)^3} \longrightarrow y'=\frac{2(5x^2-2)}{5\sqrt[5]{(x^2-2x)^2}}$

$f'(2)=-4$

شیب خط مماس بر تابع در $x=2$

شیب خط تماس بر تابع در $x=a$ عکس و قرینه شیب خط مماس بر تابع در $x=a$ است:

$$\text{جواب}=\frac{-1}{f'(2)}=\frac{1}{4}$$

* اگر f یک تابع مشتق‌پذیر و معادله $f(x)-3x=2$ دارای 4 جواب باشد، معادله $f'(x)=3$ چند جواب دارد؟

$f(x)-3x=2$ یعنی شیب مماس f چند بار برابر 3 می‌شود

$f(x)=cx+2$ یعنی اگر مماس f و خط $cx+2$ را رسم کنیم این دو در 4 نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند

حداقل ۲
حداقل ۵
حداقل ۳
حداقل ۳

به ازای چند خط مماس f به معادله $y=5x+2$ می‌شود.

---

* $(f\circ f(x))'=4x^3+4x$

$f(x)=?$

$f(0)=1$

$f(x) \longrightarrow n$ درجه

$f\circ f(x) \longrightarrow n^2$ درجه

$(f\circ f(x))' \longrightarrow n^2-1$ درجه

$n^2-1=3 \longrightarrow n^2=4 \longrightarrow n=2$ یا $n=-2$

$f(x)=ax^2+bx+c$

$c=1$

$(f\circ f(x))'=f'(f(x))\times f'(x)=\left(2a(ax^2+bx+1)+b\right)\times(2ax+b)$

$=$

$(2a^2x^2+2abx+2a+b)(2ax+b)$

$=$

$4a^2x^3+2a^2bx^2+4a^2bx+2ab^2x$
$+4a^2x+2ab+2abx+b^2$

$4a^3=4 \longrightarrow a=1$

$b=0$

$f(x)=x^2+1$

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

۵

② تکنیک تعیین درجه‌ی سؤال (ساده‌سازی و سپس مشتق‌گیری):

* $y=\dfrac{x-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^2}-1} \longrightarrow y'(1)=?$

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[6]{x^2}-1\right)}{\sqrt[6]{x^2}-1}=\sqrt[6]{x}$$

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow y'(1)=\frac{1}{6\sqrt[6]{1^2}}=\frac{1}{12}$$

* $f(x)=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)^4 \longrightarrow f''(9)=?$

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}+2}\right)^4=x^2$$

$$f'(x)=2x \longrightarrow f''(x)=2$$

$$f''(9)=2$$

* $y=\dfrac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\,(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}} \longrightarrow y'(4)=?$

$$y=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\sqrt{x+5}\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+5}\right)}=\sqrt{x}+\sqrt{x+5}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+5}} \longrightarrow y'(4)=\frac{5}{12}$$

* $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^3}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow f'(1)=?$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}}$$

$$\| \quad \sqrt{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

* $f(x)=\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-x-2}$ $\quad f'(x)=?$

$$f(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x-1)(x^2+3x+2)}=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$f(x)=x-2 \longrightarrow f'(x)=1$$

* $y=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)$

$y'(0)=?$

$\times\dfrac{x-1}{x-1}$

$$y=\frac{x^{32}-1}{x-1}$$

$$y'=\left.\frac{32x^{31}(x-1)-(x^{32}-1)}{(x-1)^2}\right|_{x=0}=1$$

---

* $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ مشتق تابع کدام است؟

$$y'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$

اگر سریع مشتق نگیرم داریم:

$$1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

که امکان ساده سازی نمی‌باشد عبارت را در مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1$$

و تقسیم می‌کنیم بر مشتق مخرج:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-x$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-1$$

$$y=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\times\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x^2-1-x^2}=-x+\sqrt{1+x^2}$$

$$\longrightarrow y'=-1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1$$

* $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-6x+9}\longrightarrow y'(0)=?$

$$y=\frac{(x+2)^2}{(x-3)^2}=\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2$$

$$y'=2\left(\frac{x+2}{x-3}\right)\times\frac{-5}{(x-3)^2}\Bigg|_{x=0}=2\times-\frac{2}{3}\times-\frac{5}{9}=\frac{20}{27}$$

https://telegram.me/konkooooriha

صـ ۱۰

* حاصل $f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$ باشد، $f(x)+(x-1)f'(x)$ کدام است؟

نکته: حاصل طلایی $y+xy'$

$(xy)'=y+xy'$ می‌دانیم:

پس هرگاه حاصل $y+xy'$ را مشتق بگیریم، xy را مشتق می‌گیریم و سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x)+(x-1)f'(x)=\Big\{(x-1)f(x)\Big\}'$$

$$\Big\{\underbrace{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}_{x^{16}-1}\Big\}'$$

جواب $=16x^{15}$

x^7
$16x^{15}$
x^{16}
$x^{16}-1$

https://telegram.me/konkooooriha

* $\begin{cases} f(x)=(x+\sqrt{x^2-x})^4 \\ g(x)=(x-\sqrt{x^2-x})^4 \end{cases}$

$f'(1)g(1)+g'(1)f(1)=?$

$\underbrace{f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\Big|_{x=1}}_{(fg)'}=?$

$fg=(x^2-x^2+x)^4=x^4$

$(fg)'=4x^3\Big|_{x=1}=4$

* $\begin{cases} f(x)=(\sqrt{1+x^2}-x)^5 \\ g(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)^5} \end{cases}$

$f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=?$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{fg-gf}{g^2}$ ؟

$\dfrac{f}{g}=\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)^5}{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)^5}}=(1+x^2-x^2)^5=1$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=0\longrightarrow fg-gf=0$

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

* اگر f و g توابع پیوسته‌ای باشند و وضع مشتقشان برابر صفر باشد، آیا $\frac{f}{f'}+\frac{g}{g'}=0$ است. از این عبارت چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

$f+g$ یک تابع ثابت است

$g-f$ یک تابع ثابت است

fg یک تابع ثابت است

$\frac{f}{g}$ یک تابع ثابت است

$\frac{fg'+gf'}{f'g'}=0 \Rightarrow (fg)'=0$

* if $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$, $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$ → $y=g(x)-f(x)$ ؟ مشتق

$y=g(x)-f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+x+1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=x-1$

$y'=1$ ✓

۱۱۰

* $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $g(x)=\frac{(x+2)^3}{(x+1)}$ → $f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$

$\frac{f'g+g'f}{(f'g)'}\Big|_{x=0}=?$

$fg=\frac{-(x+2)^{\cancel{2}}}{(x+1)(x+2)^{\cancel{2}}}=\frac{-x-2}{x+1}$

$(f'g)'=\frac{+2}{(x+1)^2}\Big|_{x=0}=+2$ ✓

* $f(x)=\frac{1}{x+2}$ → $f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$

$g(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+4x+4}=\frac{x-\sqrt{x}}{(x+2)^2}$

$\frac{g'f'-f'g}{(f'f)^2}\Big|_{x=1}=?$

$2\to\left(\frac{g}{f'}\right)'\Big|_{x=1}=?$

$\frac{g}{f'}=\frac{\frac{x-\sqrt{x}}{(x+2)^2}}{\frac{1}{x+2}}=x-\sqrt{x}-x \to \left(\frac{g}{f'}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\Big|_{x=1}$

$-\frac{1}{2}$ ✓

https://telegram.me/konkooooriha

صـ ۱۲

* if $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x+1} \\ , \\ g(x)=\dfrac{x+2}{x+1} \end{cases}$ $\longrightarrow f'(x)-g'(x)=?$

$$f(x)-g(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x+1}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$$

$$x^2-1=\frac{x^2(x+1)-(x+1)}{x+1}$$

$$f'(x)-g'(x)=2x$$

* if $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x}{x^2+x+1} \\ , \\ g(x)=\dfrac{2x^2+2}{x^2+x+1} \end{cases}$

$, f'(x)+mg'(x)=0$

$m=?$

$$f(x)+g(x)=\frac{2x^2+2x+2}{x^2+x+1}=2$$

مشتق

$$f'(x)+g'(x)=0 \longrightarrow \boxed{m=1}$$

https://telegram.me/konkooooriha

* $\begin{cases} f(x)=\log(2x+\sqrt{9x^2-1}) \\ , \\ g(x)=\log(2x-\sqrt{9x^2-1}) \end{cases}$ اگر

با شرط حاصل $\dfrac{f''(1)}{g''(1)}$ کدام است؟

نکته: $\log a+\log b=\log ab$

(آیتی نظام‌مهم / عددی که طرف نظام‌مهم واردی میره)

$$f(x)+g(x)=\log(9x^2-9x^2+1)=\log 1=0$$

$f(x)+g(x)=0$

$f(x)=-g(x) \longrightarrow f'(x)=-g'(x)$

$f''(1)=-g''(1) \xleftarrow{x=1} f''(x)=-g''(x)$

$$\frac{f''(1)}{g''(1)}=\boxed{-1}$$

https://telegram.me/konkooooriha

* if $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{2 + \sin^2 x} \\ g(x) = x - \sqrt{2 - \cos^2 x} \end{cases}$

$f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = ?$

$(fg)'$

$f'(x) = x + \sqrt{2 + \sin^2 x}$

$g(x) = x - \sqrt{2 + 1 - \cos^2 x} = x - \sqrt{2 + \sin^2 x}$

$\sin^2 x$

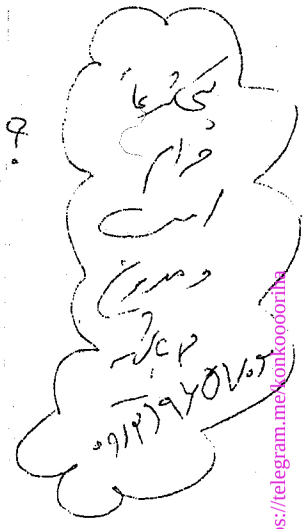
ترجیح $g \circ f$

$fg = x^2 - 2 - \sin^2 x \xrightarrow{\text{مشتق}} fg' + gf' = 2x - \frac{2\sin x \cos x}{\sin 2x}$

$= 2x - \sin 2x$

نکته: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$



https://telegram.me/konkooooriha

* if $\begin{cases} f(x) = (\sqrt{2\cos^2 x} - \sin x)^2 \\ g(x) = (\sqrt{2 - \cos^2 x} + \sin x)^2 \end{cases}$

توابع متمم اند

$fg = [2 - \cos^2 x - \sin^2 x]^2$

$= (2-1)^2 = 1^2$

$(f \cdot g)' = 0 \longrightarrow fg' + gf' = 0$

$fg' + gf' = 0$

$fg' - gf' = 0$

$fg' + gf' = 1$

$fg' - gf' = 1$

* $y = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x$

$y'(\frac{\pi}{14}) = ?$

$\frac{1}{2}\sin 2x \to \frac{1}{2}\sin 4x \to \frac{1}{2}\sin 8x \to \frac{1}{2}\sin 16x$

$= \frac{1}{16}\sin 16x$

$y' = \frac{1}{16} \times 16\cos 16x \Big|_{x=\frac{\pi}{14}} = -1$

https://telegram.me/konkooooriha

۱۴

* $y = \sin^2(2x)\cos^2(2x)$ $\quad y'\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} = ?$

$=$

$(\sin(2x)\cos(2x))^2$

$=$

$\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 4x$

$y' = \frac{1}{4} \times 2\sin 4x \cos 4x \times 4\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} = 1$

* $y = \sqrt{\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}}$ $\quad y'(0) = ?$

$=$

$\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}}\ (\sin x+\cos x)^2$

$=$

$\sqrt{\sin x+\cos x}$

$y' = \frac{\cos x-\sin x}{2\sqrt{\sin x+\cos x}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$

* $y = \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = ?$

$y' = -2\sin 2x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

$(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cos x)$

* $y = \frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x} = 1+\frac{1}{2}\sin 2x$

$y'\Big|_{x=\pi} = ?$

$y' = \cos 2x\Big|_{x=\pi} = 1$

* $y = \tan^2 x \cot^2 x = \cot x$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

$y' = -(1+\cot^2 x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1$

https://telegram.me/konkooooriha

* $y = (\sin x + \cos x)^4 - 2\sin^2 x$

$y'|_{x=\frac{5\pi}{12}} = ?$

$(\sin x \pm \cos x)' = 1 \pm \sin 2x$

$y = (1+\sin 2x)' - 2\sin^2 x$

$= 1 + 2\sin 2x + \sin^2(2x) - 2\sin^2 x$

$= 1 + \sin^2(2x)$

$y' = 2\sin 2x (\cos 2x) \times 2 = 2\sin 4x$

$= 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \sin\frac{\pi}{3}$

$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

* $f(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{5\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = ?$

نکته: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

α نسبت دیر $\leftarrow$ نسبت مثلثی $\left(\frac{\pi}{2} \text{ مضرب زوج} \pm \alpha\right)$

α نسبت دیر $\leftarrow$ نسبت مثلثی $\left(\frac{\pi}{2} \text{ مضرب فرد} \pm \alpha\right)$

$f(x) = \sin\left((x + \frac{5\pi}{3}) + (x - \frac{\pi}{3})\right)$

$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$

$f'(x) = -2\sin 2x\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} = -2\sin\frac{\pi}{6} = -1$

* if $f(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = ?$

نکته: $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$f'(x) = -\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{12}} = -\left(1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

https://telegram.me/konkooooriha

* if $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2+1}}$

حاصل $(x+\frac{1}{x})yy'=?$

۱) y^2+1

۲) $y+\frac{1}{y}$

۳) $-(y^2+1)$

۴) $-(y+\frac{1}{y})$

برحسب y؟

$$y^2=\frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$2yy'=\frac{-2x(x^2+1)-2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$2yy'=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}\longrightarrow yy'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$?=\left(x+\frac{1}{x}\right)\times\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2}{x^2+1}$$

$\frac{x^2+1}{x}$

از دیکال نداره، در صورتی که y از دیکال داره

پس صرفاً نمی‌توان y^2 رسیده و در صورتی اگر صورت و مخرج y را جمع کنیم y^2 حذفی شود

$$1+y^2=\frac{1-x^2}{x^2+1}+1=\frac{2}{x^2+1}$$

$$-(1+y^2)=\frac{-2}{x^2+1}$$

* if $y=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$

حاصل $y^2+2yy'(1+x)=?$

هرگاه yy' دیده شد حتماً از y^2 مشتق گرفته‌ایم

هرگاه y^2y' دیده شد حتماً از y^3 مشتق گرفته‌ایم

۱) $2x$

۲) 9

۳) $\frac{9}{1+x}$

۴) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

عبارت $=\left[(x+1)y^2\right]'$

$y^2+2yy'(1+x)$

عبارت $\longrightarrow=\left((x+1)\times\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\right)'=x^2\xrightarrow{\text{مشتق}}2x$

* حاصل $y=\frac{2x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ به ازای $x=3$ کدام است؟

۱) $5\sqrt{2}$

۲) $5\sqrt[3]{4}$

۳) $4\sqrt{3}$

۴) $8\sqrt{3}$

$2xy^3+3y^2y'(x^2-1)$

$\left[(x^2-1)y^3\right]'=\left[(x^2-1)\times\frac{(2x-3)^3}{x^2-1}\right]'$

$=3\times2(2x-3)^2\Big|_{x=3}=6\times9=54$

بررسی چند نکته

ت) مقدار مشتق تابع $f(x)=(x^{15}-2x^{10}+x^5+2x+1)^{100}$ در $x=0$ کدام است؟

۲۰۲ — ۱۰۰ — ۱۰۱ — ۹۹

$$f'(x)=100(x^{15}-2x^{10}+x^5+2x+1)^{99}\times(15x^{14}-20x^9+5x^4+2)$$

$$f'(0)=100(1)(2)=200$$

ت) اگر $f(x)=\sin^2 x$ باشد حاصل $f'(\arctan 2)$ کدام است؟

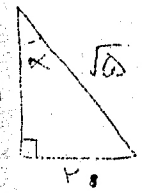
$\frac{9}{25}$ — $\frac{4}{5}$ — $\frac{5}{4}$ — $\frac{16}{25}$

$$f'(x)=2\sin x\cos x$$

$$f'(\arctan 2)=2\sin(\arctan 2)\cos(\arctan 2)$$

فرض: $\arctan 2=\alpha$ ← مقابل / کناری ؛ بدون نیاز به خط وصل طراحی

$\tan\alpha=2$



$$f'(x)=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

ت) اگر $x(x)=(x^2+1)^2(2x-5)^3(2x-1)^4$ باشد $\frac{x'(1)}{x(1)}$ کدام است؟

$\frac{5}{3}$ — $-\frac{94}{3}$ — $\frac{10}{3}$ — $\frac{154}{3}$

$$x(x)=f(x)g(x)h(x)$$

$$x'(x)=f'(x)g(x)h(x)+g'(x)f(x)h(x)+h'(x)f(x)g(x)$$

$$\longrightarrow\frac{x'(x)}{x(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}+\frac{h'(x)}{h(x)}$$

$$\begin{cases} f(x)=(x^2+1)^2 \longrightarrow f'(x)=4x(x^2+1) \longrightarrow f(1)=8,\ f'(1)=16 \\ g(x)=(2x-5)^3 \longrightarrow g'(x)=6(2x-5)^2 \longrightarrow g(1)=-1,\ g'(1)=6 \\ h(x)=(2x-1)^4 \longrightarrow h'(x)=8(2x-1)^3 \longrightarrow h(1)=1,\ h'(1)=8 \end{cases}$$

$$\longrightarrow\frac{x'(1)}{x(1)}=\frac{16}{8}+\frac{6}{-1}+\frac{8}{1}=\frac{10}{3}$$

ت) اگر مشتق $f(\tan x)$ برابر $\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$ باشد آنگاه مشتق $f(\sin x)$ در $x=0$ کدام است؟

$\tan x$ — $(1+\sin^2 x)\cot x$ — $\frac{1+\sin^2 x}{\sin x}$ — $\cot x$

$$y=f(\tan x)\longrightarrow y'=f'(\tan x)\times(1+\tan^2 x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$$

$$\longrightarrow f'(\tan x)=\frac{1}{\tan x}\longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}=\cot x$$

$$\longrightarrow y=f(\sin x)\longrightarrow y'=\cos x f'(\sin x)=\cos x\times\frac{1}{\sin x}$$

https://telegram.me/konkooooriha

مشتق عامل صفرشونده

اگر $f(x)$ به صورت حاصل ضرب چند عامل باشد و بدانیم $x=a$ مقداریست از عوامل صفر شونده، آنگاه برای محاسبه مشتق تابع در $x=a$ داریم:

$$f'(a) = \left(\text{مشتق عامل صفرشونده در } x=a\right) \times \left(\text{مانده عبارت به ازای } x=a\right)$$

مثال‌ها:

* $f(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2+x+1)}{x^3+2x+3}$ ، $f'(1)=?$

عامل صفر شونده — عامل صفر نشونده

$$f'(1)=2\times\left(\frac{x^2+x+1}{x^3+2x+3}\right)\Big|_{x=1}=2\times\frac{3}{6}=1$$

* $f(x)=\dfrac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$ ، $f'(-1)=?$

$$f'(-1)=1\times\frac{h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}\Big|_{x=-1}=1\times\frac{h(-1)}{-h(-1)}=-1$$

* $f(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{2x-2}}{(5x-3)^4}$ ، $f'(1)=?$

$$f'(1)=1\times\frac{\sqrt{2x-2}}{(5x-3)^4}\Big|_{x=1}=\frac{1}{16}$$

---

۱۸ $g(x)=\dfrac{f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$ ، $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\sin x+\cos x$

① اگر $x=\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$g(x)=(\sin x+\cos x)(-\sin x+\cos x)$

$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\sin x+\cos x$

$g'\left(\frac{\pi}{12}\right)=-2\sin 2x\Big|_{x=\frac{\pi}{12}}=$ ④

② اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد و $f(x)=(x^2-2x)[x]+[-x]$ آنگاه $f'(2)$ کدام است؟

$\lim\limits_{x\to\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}}[x]+[-x]=-1$

$f(x)=2x-x^2 \longrightarrow f'(x)=2-2x$

$f'(2)=$ ④

③ مقدار مشتق تابع $y=\dfrac{2\tan^2 x(1+\cos 2x)}{1+\tan^2 x}$ در $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

نکته: $\begin{cases}1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha\\ 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha\end{cases}$ ، $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$y=2\tan^2 x\times 2\cos^2 x\times\cos^2 x=(\sin 2x)^2$

$\longrightarrow y'=2\sin 2x\cos 2x\times 2=2\sin 4x$

$\longrightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

۱۲۲

* $f(x)=\frac{(x-2)\log(x+1)}{\sqrt{x^2+5}}$ $\quad f'(2)=?$

$$f'(2)=1\times\left.\frac{\log(x+1)}{\sqrt{x^2+5}}\right|_{x=2}=\frac{\log 10}{\sqrt{9}}$$

$\frac{1}{3}$

* $f(x)=(x-5)(2x-5)\cdots(20x-5)$

$f'(1)=?$

$$f'(1)=5(-4)(-3)(-2)(-1)(1)(2)\cdots(15)$$

$$=\boxed{120\times 15!}$$

* $f(x)=(x^2-1)(x^2-2)\cdots(x^2-10)$

$f'(2)=?$

$$f'(2)=\boxed{9\times 8!}$$

* $f(x)=x(x^2-1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$

$f'(1)=?$

$$f'(1)=\left.2x\times(x)\times(x+2)\times(x+3)\times(x+4)\times(x+5)\right|_{x=1}$$

$$=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 9=9!$$

* $f(x)=x(|x|+1)$

$f'(0)=?$

$$f'(0)=\left.(|x|+1)\right|_{x=0}=1$$

* $f(x)=\frac{x^2(x+1)}{(2x-1)^3}\cos\frac{\pi}{3x^2-1}$

$f'(1)=?$

$$f'(1)=\left.\sin\frac{\pi}{3x^2-1}\times\frac{9\pi x}{(3x^2-1)^2}\times 2\right|_{x=1}$$

3π

۲۰

* $f(x)=\frac{\sin^{2}x}{1+3\sin^{2}x}\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=?$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{2}}=-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=-0/1$

* $f(x)=(x-1)\sin\frac{\pi}{x^{2}+1}+\underbrace{(x^{2}-3x+2)}_{(x-1)(x-2)}\tan\frac{\pi}{x^{2}+3}$

$f'(1)=?$

$f(x)=(x-1)\left(\sin\frac{\pi}{x^{2}+1}+(x-2)\tan\frac{\pi}{x^{2}+3}\right)$

$f'(1)=1\left(\sin\frac{\pi}{x^{2}+1}+(x-2)\tan\frac{\pi}{x^{2}+2}\right)\Big|_{x=1}$

$=1(1-1)=1\left(\sin\frac{\pi}{2}+(-1)\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\frac{\pi}{2}=1$ عامل صفر، $\tan\frac{\pi}{4}=1$ عامل غیرصفر

* $f(x)=\underbrace{\sin x}_{\text{عامل صفر}}\underbrace{\cos x\tan\frac{x}{4}\cot\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}}_{\text{عامل غیرصفر}}$

$f'(\pi)=?$

$f'(\pi)=\cos x\times\cos x\tan\frac{x}{4}\cot\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_{x=\pi}$

$=-1\times-1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

* $f(x)=\sin x\cos^{8}x \qquad f'(\pi)=?$

$f'(\pi)=\cos x\times\cos^{8}x\Big|_{x=\pi}=(-1)(-1)^{8}=-1$

* $f(x)=\sin(2x-\pi)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^{2}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=2\pi^{2}$

نکته: اگر $x=a$ ریشه‌ی تکراری از مرتبه‌ی n برای $y=f(x)$ باشد، یعنی:

$f(a)=0$

$f'(a)=0$

$f''(a)=0$

$\vdots$

$f^{(n-1)}(a)=0$

$f^{(n)}(a)\neq0$

$\Longrightarrow$ پس اگر در ساختار ضابطه بیش از یک عامل صفر شونده موجود باشد، مشتق اول برابر با صفر است.

https://telegram.me/konkooooriha

* $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x}-x^2+1}{\sin x+\cos x+1}$

$f'(0)=?$

$f'(x)=\dfrac{x^2(\sqrt[3]{x}-1)}{\sin x+\cos x+1}+\dfrac{1}{\sin x+\cos x+1}$

$f'(0)=0+\dfrac{0-(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x+1)^2}\Big|_{x=0}=-\frac{1}{4}$

ویژگی‌های ریاضی ← کاربرد مفهوم توابع زوج و فرد در حل مسائل توابع

مفهوم تابع زوج و تابع فرد:

تابع زوج ← $f(-x)=f(x)$ متقارن نسبت به محور yها

تابع فرد ← $f(-x)=-f(x)$ متقارن نسبت به مبدأ مختصات

نکته: متقارن تابع زوج، تابع فرد است

و متقارن تابع فرد، تابع زوج است

نکته: $f(0)=0$ ← تابع فرد

* $f(x)=(x^2+x-2)(x^3-1)(x+\sqrt{x})$

عامل صفر شونده — عامل صفر شونده

$f'(1)=?$

$f'(1)=$ صفر

۱ضرب
۲×۱=۲
۳×۲=۶
۴×۶=۲۴

* $f(x)=\dfrac{\tan^2 x(1+\cos x)}{1-\sin x}$

$f'''(\pi)=?$

$\tan x=0$ یا $1+\cos x=0$ ← $x=\pi$ ← تابع f در این نقطه ۳ عامل صفر شونده دارد

$f'''(\pi)=$ صفر ← پس

* $f(x)=\sin^3 x(2\cos^3 x+\cos 2x+1)$

$f''(\pi)=?$

$f''(\pi)=$ صفر

* $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x+2}$ $\quad f'(-1)=?$

$f(x)=\dfrac{(x+1)^3+1}{(x+1)}=(x+1)^2+\dfrac{1}{x+1}$

$x+1=0$ ← $x=-1$ ← ۲ عامل صفر شونده

$\Rightarrow f'(-1)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}\Big|_{x=-1}=-1$

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

۲۲

* $f(x)=\frac{x^{\wedge}+\cos x-1}{x\sin x-|x|}$ $f'(0)=?$

مشتق‌پذیر ← پیوسته ← حد دارد $\longrightarrow f'(0)=$ صفر

* if $f(x)=\frac{x^{\wedge}+x^{\varepsilon}+1}{x^{2}+1}$ زوج

$f'(\sqrt{2})+f'(-\sqrt{2})=?$

مشتق‌پذیر ← پیوسته ← حد دارد $\longrightarrow f'(-x)=-f'(x)$

$f'(-x)+f'(x)=0$

$x=\sqrt{2}$

$f'(\sqrt{2})+f'(-\sqrt{2})=$ صفر

* $f(x)=\frac{x^{3}+1+2x^{2}\cos x}{(x\tan^{-1}x+1)^{5}}$ $f'(0)=?$

مشتق‌پذیر ← پیوسته ← حد دارد $\longrightarrow f'(0)=$ صفر

* $f(x)=\frac{x^{2}\cos x+\sin x^{2}}{x^{4}+x^{2}+1}$

$f^{(1399)}(0)=?$

مشتق‌پذیر ← $f' \to f'' \to f''' \to f^{(4)} \to f^{(5)} \to \cdots$

$f^{(1399)} \to f^{(1400)}(0)=0$

* $y=\frac{1}{x^{1402}+1}$

$y^{(1401)}(0)=?$

$y \to y' \to y'' \to y''' \to y^{(4)} \to y^{(5)} \to \cdots$

$y^{(1399)} \to y^{(1400)}(0)=0$

https://telegram.me/konkooooriha

تست ۱۳۹۲

بررسی مشتق‌پذیری در یک نقطه

اگر $f(x)=\dfrac{\sin x\tan^2 x+(x+2)(x^2+2)}{(x+3)\cos x}$ آنگاه $f'(0)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{2}{5}$
۴) $-\frac{2}{5}$

تفکیک می‌کنیم: عامل صفر / عامل صفر

$$f(x)=\frac{\sin x\tan^2 x}{(x+3)\cos x}+\frac{x^2+2}{\cos x}$$

چون کسر اول صورتش به ازای $x=0$ مخرج صفر نمی‌شود

تابع زوج (g زوج) $\longrightarrow$ g' فرد $\longrightarrow$ $g'(0)=0$

$$f'(0)=0+0=0$$

اگر f تابعی فرد و مشتق‌پذیر باشد و $f(2)=1$، حاصل $f'(-2)$ کدام است؟

$y=f(3x+1)$ مشتق تابع در $x=-1$ کدام است؟

f تابعی فرد است $\Rightarrow f'$ زوج است $\Rightarrow f'(-2)=f'(2)$

۱) -1
۲) 1
۳) -3
۴) 3

$$g(x)=f(3x+1)$$

$$g'(x)=3f'(3x+1)\xrightarrow{x=-1} g'(-1)=3f'(-2)=3$$

گزینه ۴

تابع f زوج بوده در $x=0$ مشتق‌پذیر است. اگر $f(0)=3$ و $g(x)=(x^3+2x-1)f(x^2)$، حاصل $g'(0)$ کدام است؟

f زوج $\Rightarrow f'(0)=0$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

$$g'(x)=(6x^2+2)f(x)+f'(x)(3x^2+2x-1)$$

$x=0$

$$g'(0)=2f(0)+f'(0)(-1)=\underbrace{2f(0)}_{3}-\underbrace{f'(0)}_{0}=6$$

گزینه ۴

مشتق تابع $y=\sqrt[3]{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$ در $x=1$ کدام است؟

۱) $-\sqrt[3]{4}$
۲) $\sqrt[3]{4}$
۳) صفر
۴) $\sqrt[3]{64}$

$$y=(x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}$$

$$y'(1)=1\times\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)}\Big|_{x=1}=\sqrt[3]{4}$$

گزینه ۲

نکته: یک روش دیگر برای مشتق گیری ضمنی به شکل زیر است:

وقتی نسبت به x مشتق می‌گیریم با y مانند x برخورد می‌کنیم

$x^n \xrightarrow{\text{مشتق}} n x^{n-1}$

مثلاً: $x^4 \xrightarrow{\text{مشتق}} 4x^3$

وقتی نسبت به y مشتق می‌گیریم با x مانند y برخورد می‌کنیم

$y^n \xrightarrow{\text{مشتق}} n y^{n-1} y'$

مثلاً: $y^5 \xrightarrow{\text{مشتق}} 5y^4 y'$

مثال: $* x^3 y - x y^3 = -x - y - 2$ $\quad y'_x = ?$

$x^3 y - x y^3 + x + y + 2 = 0$

روش ① (روش سریع)

$$y'_x = -\frac{y \times 3x^2 - y^3 + 1}{x^3 - x \times 3y^2 + 1}$$

روش ② (روش شرعی)

$3x^2 y + y' x^3 - y^3 - 3y^2 y' x + 1 + y' = 0$

$3x^2 y - y^3 + 1 = y'(-x^3 + 3y^2 x - 1)$

$$y' = \frac{3x^2 y - y^3 + 1}{-x^3 + 3y^2 x - 1}$$

$* x^2 y^3 - \sin xy - \sqrt[3]{xy^2} + 3x^2 - 4y = 0$ $\quad x'_y = ?$

روش ① (روش سریع)

$$x'_y = -\frac{x^2 \times 3y^2 - x\cos xy - \frac{x \times 2y}{3\sqrt[3]{(xy^2)^2}} - 4}{y^3 \times 2x - y\cos xy - \frac{y^2}{3\sqrt[3]{(xy^2)^2}} + 9x}$$

مشتق عبارت ضمنی

عبارت $\begin{cases} \text{صریح} \longrightarrow y = f(x) \\ \text{ضمنی} \longrightarrow f(x,y) = 0 \end{cases}$

عبارت ضمنی زمانی داریم که در عبارت بیش از یک y یا y توان کاردا باشد

مثال: عبارت صریح $y = 3x^4 - 9x^2 + 12x + 5$

عبارت ضمنی $x^4 y^5 + 4y^2 - 4x^3 + 12 = 0$

عبارت ضمنی $x^2 y^3 - \sin xy = \sqrt[3]{xy^2} - 3x^2 + 4y$

در عبارت ضمنی هر y به دستمی می‌باشد که به سادگی نمی‌توانیم y را بر حسب x به دست آوریم. در این صورت اگر مشتق عبارت را از ما بخواهند باید به یکی از دو روش زیر عمل کنیم. مشتق گیری ضمنی این شکل را حل می‌کند:

$$y'_x = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

$f'(x)$: y را ثابت در نظر گرفته و نسبت به x مشتق می‌گیریم

$f'(y)$: x را ثابت در نظر گرفته و نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$x'_y = -\frac{f'(y)}{f'(x)}$$

$f'(y)$: x را ثابت در نظر گرفته و نسبت به y مشتق می‌گیریم

$f'(x)$: y را ثابت در نظر گرفته و نسبت به x مشتق می‌گیریم

دقت شود که در محاسبه مشتق این عبارات اول باید تمام عناصر را به یک طرف ببریم و بعد از رابطه فوق مشتق را به دست آوریم

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

$$2xx'y^3 + 3y^2x'^2 - (x'y + x)\sin xy - \frac{x'y^2 + 2yx}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} + 4xx' - 4 = 0$$

$$2xx'y^3 + 3y^2x'^2 - x'y\sin xy - x\sin xy - \frac{x'y^2}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} + \frac{2yx}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} + 4xx' - 4 =$$

$$x'\left(2xy^3 - y\sin xy - \frac{y^2}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} + 4x\right) = -3y^2x'^2 + x\sin xy + \frac{2yx}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} + 4$$

$$x' = \frac{-3y^2x'^2 + x\sin xy + \frac{2yx}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} + 4}{2xy^3 - y\sin xy - \frac{y^2}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} + 4x}$$

* $x^4 + \cos(2x + 3y) + 2y = 0$

$y'_x = ?$

روش دوم

$$y'_x = -\frac{2x - 2\sin(2x + 3y)}{-3\sin(2x + 3y) + 2}$$

* $y = x + \cos xy \qquad y'(0) = ?$

روش اول $y - x - \cos xy = 0 \quad \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$$y'_x = -\frac{1 - y\sin xy}{-x\sin xy - 1} \xrightarrow[y=1]{x=0} y' = -\frac{1-0}{0-1} = 1$$

* $x^3y - xy^3 + x + y + 2 = 0$

$x'(0) = ? \quad \begin{cases} -2 \\ 0 \end{cases}$

روش دوم $x'y = -\dfrac{x^3 - 3xy^2 + 1}{3x^2y - y^3 + 1} \xrightarrow[y=0]{x=-2} x' = -\dfrac{-8+1}{1} = 7$

* $y = \sin\frac{x}{y} + 1$

$y'(\pi, 1) = ?$ شیب مماس منحنی در نقطه

روش اول $y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$

$$y'_x = -\frac{-\cos\frac{x}{y} \times \frac{1}{y}}{1 - \cos\frac{x}{y} \times -\frac{x}{y^2}}$$

$(\pi, 1)$

$$y'_x = \frac{1}{\pi - 1}$$

نکته: گاهی اوقات می‌توان معادلات ضمنی را به معادلات صریح تبدیل کرد و از معادله صریح مشتق گرفت.

مثال: $y^2 - 2y^3\sqrt{x} + x = 0$

$(y^3)^2 - 2(y^3)\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 = 0$

$(y^3 - \sqrt{x})^2 = 0 \longrightarrow y^3 = \sqrt{x}$

$\longrightarrow y = \sqrt[6]{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$

* $x^2 + y^2 = 2$

$y''_{xx} = ?$

روش ①

$y' = -\frac{2x}{2y} \longrightarrow y' = -\frac{x}{y}$

$y'' = -\frac{1 \times y - y' \times x}{y^2}$

$y'' = -\frac{y - (-\frac{x}{y})x}{y^2} = -\frac{\frac{y^2+x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{2}{y^3}$

$y'' = -2y^{-3} \longleftarrow -\frac{2}{y^3}$

$\longleftarrow$

* در نقطه‌ای از منحنی $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3 = 0$ که y بر حسب x است، y' کدام است؟

$y = 3x$

$y'_x = -\frac{2x+2y}{2x+4y} \xrightarrow{y=3x} y'_x = -\frac{2x+6x}{2x+12x}$

$-\frac{8x}{14x} = (-\frac{4}{7})$

* دو نقطه بر منحنی $x^2 + 2y^3 = 4x + 1$ وجود دارد که در این نقاط خط مماس بر منحنی موازی محور xها است. حاصلضرب طول‌های این دو نقطه کدام است؟

نکته: در منحنی‌ها / ضمنی از حل دستگاه

$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$

نقاط مماس افقی

$y' = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$

شیب خط مماس در توابع ضمنی

مماس افقی $\longrightarrow$ شیب $= 0$

مماس قائم $\longrightarrow$ شیب $= \infty$

از حل دستگاه

$\begin{cases} f'(y) = 0 \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$

نقاط مماس قائم به دست می‌آیند

$P = x_1 x_2 = \frac{-1}{1} = (-1)$

A | x_1

B | x_2

$x^2 + 2y^3 - 4x - 1 = 0 \longrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$

$F(x,y)$

$f'(y) = 0 \longrightarrow 6y^2 = 0 \longrightarrow y = 0$

https://telegram.me/konkooooriha

مثال ۵

$x^2+y^2=4$

$2x+2yy'=0$

$x+yy'=0 \rightarrow y'=-\frac{x}{y}$

$1+y'^2+yy''=0 \rightarrow y''=-\frac{1+y'^2}{y}$

$=-\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y}=-\frac{\frac{x^2+y^2}{y^2}}{y}=-\frac{4}{y^3}=-4y^{-3}$

* $x^3+y^3=1$

$y''x=?$

$y'=-\frac{3x^2}{3y^2}=-\frac{x^2}{y^2} \rightsquigarrow y''=-\frac{2xy^2-2y(x^2)y'}{y^4}$

$y''=-\frac{2xy^2-2y(-\frac{x^2}{y^2})x^2}{y^4}=-\frac{\frac{2xy^3+2x^4}{y}}{y^4}$

$=-\frac{2x(y^3+x^3)}{y^5}=-\frac{2x}{y^5}$

$y''=-2xy^{-5}$

* $y^3+y=x \quad y''(2)=?$

$y^3+y-x=0$

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

$y'=-\frac{-1}{3y^2+1}=\frac{1}{3y^2+1} \xrightarrow{y=1} y'=\frac{1}{4}$

$y''=\frac{0-(6yy')\times 1}{(3y^2+1)^2}=\frac{-6\times 1\times\frac{1}{4}}{(4)^2}=-\frac{6}{64}=-\frac{3}{32}$

* مقدار مشتق دوم y نسبت به x در نقطه‌ای به عرض واحد از مبدأ $x^3y-y^3+1=0$ کدام است؟

$y=1 \quad x=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

$y'=-\frac{y}{x-3y^2} \rightsquigarrow y'=\frac{1}{3}$

$y''=-\frac{y'(x-3y^2)-(1-6yy')y}{(x-3y^2)^2}=-\frac{\frac{1}{3}(-3)-(1-6(\frac{1}{3})^2)1}{(-3)^2}$

$=-\frac{-1+1}{9}=0$ صفر

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

صـ ۲۸

* معادله خط مماس بر منحنی $xy^2 - y\sqrt{x} = 2$ در نقطه‌ای به طول ۱ و عرض منفی کدام است؟

$x=1$ در $y^2 - y - 2 = 0$ → $y=-1$ یا $y=2$

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

$y' = -\dfrac{y^2 - \frac{y}{2\sqrt{x}}}{2xy - \sqrt{x}} \xrightarrow[y=-1]{x=1} y' = \dfrac{1}{2}$

نکته: معادله خط مماس بر منحنی در نقطه (x_0, y_0):

$y - y_0 = \underbrace{f'(x_0)}_{m}(x - x_0)$ شیب خط مماس

* معادله خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای (x_0, y_0):

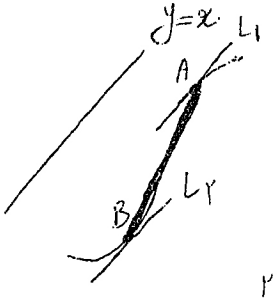
$y - y_0 = \dfrac{-1}{m}(x - x_0)$ شیب خط قائم

$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow y - (-1) = -2(x-1)$

$y + 1 = -2x + 2$

$\boxed{y = -2x + 1}$

* دو خط به معادلات $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 2$ بر هم عمود و در ربع اول و مماس شده‌اند. طول نقطه تماس کدام است؟



$|\overline{AB}| = ?$

$L_1 \perp L_2 \rightarrow m_{L_1} = -\dfrac{1}{m_{L_2}}$

$m_{L_2} = -1$ شیب

$y' = -\dfrac{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}{\frac{2}{\sqrt[3]{y}}} = -\dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} = -1 \rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$ توان ۳

$y = x$ معادله A و B

$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} = 2 \rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1$ عبارتی مشترک A و B

$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$B(-1,1)$ $A(1,-1)$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

مبحث تابع معکوس ← ویژه‌ی پایه‌ی ریاضی

برای تابع f را داده و می‌خواهد اگر بخواهیم از f و f^{-1} را بیابیم و سپس از آن مبحث بگیریم پیروی شویم زیرا در بسیاری از توابع نمی‌توانیم از رابطه f به صورت f^{-1} به دست آوریم.

پس چه کار کنیم؟

نکات:

① f و f^{-1} نسبت به $y=x$ قرینه‌اند.

② f و f^{-1} هر دو هم‌زمان، یعنی هر دو صعودی یا هر دو نزولی‌اند.

③ برای یافتن معکوس یک تابع باید یک طرف تساوی را بر حسب x و y را عوض کنیم.

مثال: $y=2x+4 \longrightarrow x=\frac{y-4}{2}$

$$y=\frac{x-4}{2}=\frac{1}{2}x-2$$

④ اگر $A(\alpha,\beta)$ در f باشد، آن‌گاه $A'(\beta,\alpha)$ در f^{-1} است.

$$A(\alpha,\beta)\in f \longleftrightarrow A'(\beta,\alpha)\in f^{-1}$$

https://telegram.me/konkooooriha

صفحه ۲۹

* شیب خط قائم بر بیضی $x^2+3y^2-8x=0$ در کدام نقطه برخورد بیضی با نیمساز ناحیه‌ی اول و در این ناحیه کدام است؟

تابع $\begin{cases} y=x \\ x^2+3y^2-8x=0 \end{cases} \longrightarrow x^2+3x^2-8x=0$

$4x(x-2)=0 \longleftarrow 4x^2-8x=0$

$x=0 \longrightarrow y=0$

$x=2 \longrightarrow y=2$

$$y'=-\frac{2x-8}{6y}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=m$$

آنچه می‌خواهیم $=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{\frac{1}{3}}=-3$ ✓

* معادله‌ی خطوط مماس بر هذلولی $y^2-4(x+1)^2=36$ موازی خط طول‌ها کدام است؟

مماس موازی محور طول‌ها $\longrightarrow y'=0 \longrightarrow y'=-\frac{-8(x+1)}{18y}=0$

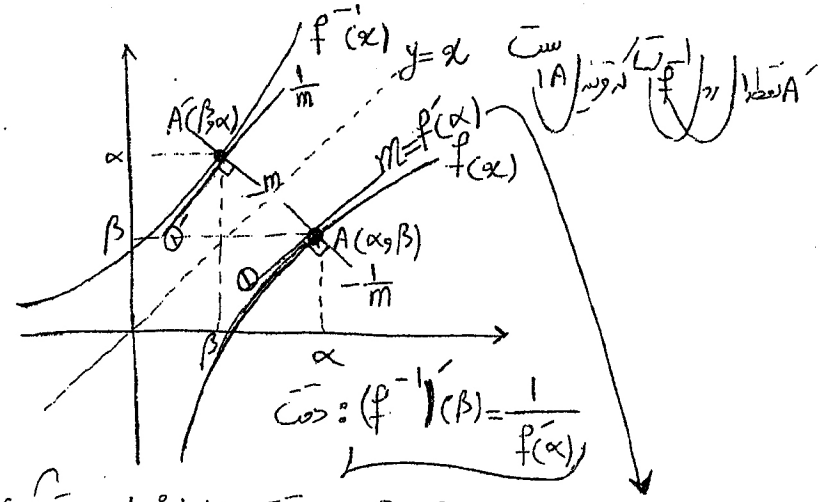
$x=-1$

$y^2=4 \longrightarrow y=\pm 2$

دو خط داریم $\begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases}$

https://telegram.me/konkooooriha

صـ۳۰



A نقطه‌ای از f است که در آن f بر $y=x$ مماس است. A' قرینه A نسبت به $y=x$ است.

$$\text{حدس: } (f^{-1})'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$$

حدس‌های ما براساس این انجام می‌شود. درست‌هاش اول این را به دست آوریم و ببینیم این حدس درست است یا نه.

مثال: تابع $f(x)=x^3+x+1$ مفروض است. معادله مماس بر نمودار f^{-1} در حوالی نقطه‌ای به طول $\frac{1}{4}$ را بیابید.

آن برابر $\frac{1}{f'}$ ی با شرط مماس در نقطه با طول $\frac{1}{4}$ است.

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{4} \longrightarrow m=4$$

$$f'(x)=4 \longrightarrow 3x^2+1=4 \longrightarrow 3x^2=3$$

$$x^2=1 \longrightarrow x=\pm 1$$

$A_1\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.$ $A_2\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$

$A'_1\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.$ $A'_2\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$ ماترینه‌ی نقطه‌ای است به حوالی $y=x$ را رسم کنید.

مثال: اگر $g(x)=f(x^3)$ باشد و $f(1)=0$ و $f'(1)=\frac{1}{4}$ آنگاه $(g^{-1})'(0)$ کدام است؟

$$g(2)=f(8)=0 \longrightarrow g^{-1}(0)=2 \longrightarrow \alpha=2 \text{ و } \beta=0$$

$$(0,2)\in g^{-1}$$
$$(2,0)\in g$$

$$m=g'(2)=3 \longrightarrow \text{آنچه خواسته شده}=(g^{-1})'(0)=\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$$

$g(x)=f(x^3) \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)=3x^2 f'(x^3)$

$x=2$

$g'(2)=12\underbrace{f'(8)}_{\frac{1}{4}}=3$

* β برای f^{-1} وارد بوده و برای f خروجی است.

مثال: اگر $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ باشد، حاصل $(f^{-1})'(9)$ کدام است؟

$$\beta=9 \longrightarrow 9=\frac{2x+3}{x-2} \longrightarrow x=3 \longrightarrow \alpha=3$$

$$(3,9)\in f$$
$$(9,3)\in f^{-1}$$

$$m=f'(\alpha)=\left.\frac{-7}{(x-2)^2}\right|_{x=3}=-7$$

آنچه خواسته شده $\Rightarrow \frac{1}{m}=-\frac{1}{7}$

if $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ آنگاه $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

$f^{-1}(x)=\frac{2x+3}{x-2} \longrightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{-7}{(x-2)^2}$

این دیگر یک عدد است $(-\frac{1}{7})$

مثال: اگر f تابعی معکوس پذیر و مشتق پذیر باشد و $f'(x)=\sqrt{1+2f^2(x)}$ آنگاه $(f^{-1})'(2)$ کدام است؟

$\beta=2 \xrightarrow{f(x)=2} \alpha=x$

$m=f'(x)=\sqrt{1+2f^2(x)}=3$

$\Rightarrow (f^{-1})'(2)=\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$ ✓ (۳)

مثال: اگر $g(x)=x^3+x$ و $f(x)=\frac{x+1}{2}$ باشند آنگاه مقدار $(g\circ f)^{-1}(1)=$ کدام است؟

$g\circ f(x)=g(f(x))=\left(\frac{x+1}{2}\right)^3+\left(\frac{x+1}{2}\right)$

$\frac{1}{8}(x+1)^3+\frac{1}{2}(x+1)=0$

$x+1=t$

$\frac{1}{8}t^3+\frac{1}{2}t=0 \longrightarrow t\left(\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}\right)=0$

$t=0$

$x+1=0$

$x=-1$

$(-1,0)\in g\circ f$

$(0,-1)\in (g\circ f)^{-1}$

$(g\circ f^{-1})'(0)=\frac{1}{(g\circ f)'(-1)}=\frac{1}{\frac{3}{8}(x+1)^2+\frac{1}{2}}\Big|_{x=-1}$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ✓ (۲)

امکان پذیرش در کنکور وجود این تابع

امکان پذیرش در کنکور نیست

مثال: تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ مفروض است. در نقطه A واقع بر f^{-1} خط مماس بر f^{-1} را رسم کرده‌ایم. عرض نقطه A کدام است؟

به موازات خط $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ یا $x+2y-1=0$ رسم کرده‌ایم.

$-m=-\frac{1}{2} \longleftarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$m=\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{x-1}=1 \longrightarrow x=2$

$f(2)=1$

$A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \longrightarrow A^{-1}\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ ✓

مثال: تابع $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ نزولی است. از نقطه‌ای واقع بر f^{-1} خط مماسی بر f^{-1} رسم کرده‌ایم. طول نقطه‌ای که این مماس کدام است؟

خط مماس بر f^{-1} به معادله $y=-2x+9$ را رسم کرده‌ایم. طول نقطه تماس کدام است؟

خط مماس بر $f^{-1} \longrightarrow y=-2x+9$

شیب خط مماس بر $f^{-1} \longrightarrow -m=-2 \longrightarrow m=2$

شیب خط مماس بر f $\longrightarrow$ شیب خط مماس بر f^{-1}

$f'(x)=2$

$f'(x)=\frac{2}{(x-1)^2} \longrightarrow (x-1)^2=1$

$\begin{cases} x=0 \longrightarrow \left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{جابجا}} \left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \\ x=-2 \xrightarrow{f} \left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{جابجا}} \left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right. \end{cases}$ ✓ (۳)

$f^{-1}(x)$

https://telegram.me/konkooooriha

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$.

مشروط است. مماس بر تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} از کدام نقطه می‌گذرد؟

(۱و۱) (۰و۲) (۰و۰) (۲و۰)

روش ①

$\beta=y=2\rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2+1=2 & x\geq 0\\ x+1=2 & x<0\end{cases}$

$\rightarrow x=\pm 1$ ق ق $x=-1$ غ ق

$\rightarrow x=1$ ق ق

$\rightarrow \alpha=x=1$

$(1,2)\in f \Longleftrightarrow (2,1)\in f^{-1}$

$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$

$f'(1)=2x\big|_{x=1}=2$

روش ② معکوس تابع

$\begin{cases}x_0=2\\ y_0=1\\ m=\frac{1}{2}\end{cases}$ $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$

$y=\frac{1}{2}x\rightarrow y=\frac{x}{2}$

روش ③

$\beta=y=2\rightarrow x^2+1=2\rightarrow x=\pm 1 \xrightarrow{x\geq 0} x=1$

$x+1=2\rightarrow x=1 \xrightarrow{x<0} \times$

$\rightarrow \alpha=x=1$

$(1,2)\in f \Longleftrightarrow (2,1)\in f^{-1}$

$f'(1)=2x\big|_{x=1}=2$

مثال: برای تابع $y=f(x)$ با $f(x)=x^3-y^3=2$ حاصل $(f^{-1})'(-1)$ کدام است؟

$\beta=y=-1$

$\alpha=x=1$

$A\begin{vmatrix}-1\\ 1\end{vmatrix}\in f^{-1}\Longleftrightarrow A\begin{vmatrix}1\\ -1\end{vmatrix}\in f$

$3x^2-3y^2y'=0$ $(f^{-1})'(-1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{1}=1$ ①

$\xrightarrow[y=-1]{x=1} 3-3y'=0\rightarrow y'=1$

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & x\leq 1\\ \frac{1}{2}(3-x) & x>1\end{cases}$ حاصل $(f^{-1})'(-2)$ کدام است؟

$f(x)=\begin{cases}-2x+3=-2 & x\leq 1\\ \rightarrow x=\frac{5}{2}\ \text{غ ق} & \\ \frac{1}{2}(3-x)=-2 & x>1\\ \rightarrow x=7\ \text{ق ق} & \end{cases}$

$(7,-2)\in f$

$(-2,7)\in f^{-1}$

$(f^{-1})'(-2)=\frac{1}{f'(7)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$ ✓

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

مثال: معادله خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ و آن $y=3x+4$ به طول ۱ در نقطه‌ای به طول ۱ بر نمودار تابع معکوس f مماس می‌باشد. معادله خط قائم بر معکوس تابع در نقطه‌ای به طول ۱ در کدام گزینه است؟

$$x=2=x \longrightarrow y=10 \longrightarrow \beta=10=y$$

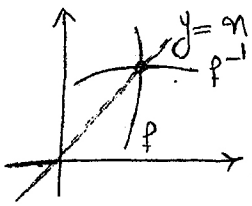
$$(2,10)\in f$$
$$(10,2)\in f^{-1}$$

$$\text{شیب خط قائم} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x_0=10 \\ y_0=2 \\ \text{شیب}=-3 \end{cases} \longrightarrow y-2=-3(x-10)$$

$$\boxed{y=-3x+32}$$

مثال: اگر $f(x)=x^3-3x$ باشد و f^{-1} تابع وارون مشتق‌پذیر f در نقطه‌ای به طول $x=0$ باشد، آنگاه $(f^{-1})'(0)$ کدام است؟



نکته: اگر یک تابع معکوس‌پذیر f را قطع کند، ما باید نقطه‌ای را به دست آوریم که x آن با عرض آن نقطه مساوی باشد. این نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد.

پس

برای به دست آوردن نقطه‌ای تلاقی یک تابع با تابع معکوس باید عدد را در تابع جایگذاری کنیم که به ازای آن $x=y$ شود.

$$y-2=2(x-1)$$

$$\text{دو تابع} \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \\ \text{شیب}=2 \end{cases} \longrightarrow y=2x \longrightarrow x=\frac{y}{2} \longrightarrow y=\frac{x}{2}$$

مثال: معادله خط مماس بر تابع معکوس $y=x^3+2x-1$ در نقطه‌ای به طول ۱ کدام است؟

روش ①

$$f^{-1}y=2 \longrightarrow 2=x^3+2x-1 \longrightarrow x=1 \longrightarrow x=x=1$$

$$(1,2)\in f$$
$$(2,1)\in f^{-1}$$

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3x^2+2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{5}$$

$$\text{روی معکوس} \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1 \\ \text{شیب}=\frac{1}{5} \end{cases} \qquad y-1=\frac{1}{5}(x-2)$$

$$\longrightarrow y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$$

روش ②

$$\beta=y=2 \longrightarrow 2=x^3+2x-1 \longrightarrow x=1 \longrightarrow \alpha=x=1$$

$$(1,2)\in f$$
$$(2,1)\in f^{-1}$$

$$f'(1)=3x^2+2\Big|_{x=1}=5$$

$$\text{روی تابع} \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \\ \text{شیب}=5 \end{cases} \longrightarrow y-2=5(x-1) \longrightarrow y=5x-3$$

$$x=\frac{y+3}{5} \longrightarrow y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$$

https://telegram.me/konkooooriha

مثال: اگر $f(x)=x^5+4x^3+2$ باشد، آن‌گاه تابع $f^{-1}(x)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر است؟

نکته: تابع f^{-1} از جایی مشتق‌پذیر است که مشتق تابع f آن‌جا برابر صفر نباشد

$$(\beta,\alpha)\in f^{-1} \iff (\alpha,\beta)\in f$$

$$\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}=\frac{1}{5\alpha^4+12\alpha^2}$$

مشتق تابع را در α حساب کنید

$$5\alpha^4+12\alpha^2=0$$

$$\alpha^2(5\alpha^2+12)=0 \longrightarrow \alpha=0$$

(ریشه ندارد)

یک ریشه داریم

پس: تابع $f^{-1}(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است

مثال: تابع $f(x)=x^3-6x^2+12x-7$ مفروض است. تابع $f^{-1}(x)$ در کدام نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

$$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x^2-4x+4)=3(x-2)^2=0$$

$x=2$, $f(2)=1$

$$\begin{cases}(2,1)\in f\\(1,2)\in f^{-1}\end{cases}$$

$$f(x)=x^3-3x \xrightarrow{y=x=f(x)} x=x^3-3x$$

$$x^3-4x=0 \longrightarrow x(x^2-4)=0$$

$x=0$ ق ق

$x=1$ ق ق

$x=-1$ ق ق

$x=2$ ق ق

$$(2,2)\in f \quad , \quad (2,2)\in f^{-1} \longleftarrow (2,2)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3x^2-3}\Big|_{x=2}=\frac{1}{9}$$

مثال: اگر $x\geq\frac{3}{2}$ و $f(x)=x^2-2x+2$ باشد، ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول عرض نقطه‌ای از f کدام است؟

$$f(x)=x^2-2x+2 \quad x\geq\frac{3}{2}$$

$$f(x)=x$$

$$x^2-2x+2=x \longrightarrow x^2-3x+2=0$$

$x=1$ ق ق

$x=2$ ق ق

$$(2,2) \longrightarrow \begin{cases}(2,2)\in f\\(2,2)\in f^{-1}\end{cases}$$

$$f(x)=x^2-2x+2$$

$$f'(x)=2x-2 \longrightarrow m=f'(2)=2$$

آنچه می‌خواهیم $=-m=-2$

https://telegram.me/konkooooriha

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$$\begin{cases} y=\text{Arcsin}x=\sin^{-1}x \longrightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y=\text{Arccos}x=\cos^{-1}x \longrightarrow y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y=\text{Arctan}x=\tan^{-1}x \longrightarrow y'=\dfrac{1}{1+x^2} \\ y=\text{Arccot}x=\cot^{-1}x \longrightarrow y'=\dfrac{-1}{1+x^2} \end{cases}$$

مثال: $*\ y=\underset{\text{①}}{\text{Arccos}}\left(\underset{\text{②}}{\sqrt{x^2+10}}\right)$

$$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+10})^2}}\times 11x=\frac{-11x}{\sqrt{1-(\sqrt{x^2+10})^2}}$$

$$*\ y=\underset{\text{①}}{\text{Arctan}}\left(\underset{\text{②}}{\sin}\left(\underset{\text{③}}{x^4}\right)\right)$$

$$y'=\frac{1}{1+(\sin x^4)^2}\times\cos x^4\times 4x^3$$

مثال: اگر مماس در نقطه‌ی $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ واقع بر منحنی $f(x)=x^3+ax$ با خط $y=2x+b$ موازی باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

نکته: اگر دو خط مماس بر نمودار f و تابع f^{-1} رسم کنیم و این دو خط موازی باشند، دو حالت داریم:

if نقاط اکیداً صعودی باشند $\longrightarrow$ شیب‌ها $=1$

if نقاط اکیداً نزولی باشند $\longrightarrow$ شیب‌ها $=-1$

$f'(x)=3x^2+a$ ، اکیداً صعودی: $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1\longrightarrow\frac{3}{4}+a=1\longrightarrow a=\frac{1}{4}$

اکیداً نزولی: $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-1\longrightarrow\frac{3}{4}+a=-1\longrightarrow a=-\frac{7}{4}$

نکته: مشتق دوم تابع معکوس از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(f^{-1}\right)''(y_0)=-\frac{f''(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^3}$$

مثال: اگر $f(x)=x^3+5x$ باشد، آن‌گاه $\left(f^{-1}\right)''(18)$ کدام است؟

$$f=y=18\longrightarrow x^3+5x=18\longrightarrow x=2$$

$$\longrightarrow\begin{cases}(2,18)\in f\\(18,2)\in f^{-1}\end{cases}$$

$$\left(f^{-1}\right)''(18)=\frac{-f''(2)}{\left(f'(2)\right)^3}=-\frac{12}{17^3}\leftarrow\begin{cases}f'(x)=3x^2+5\longrightarrow f'(2)=17\\f''(x)=6x\longrightarrow f''(2)=12\end{cases}$$

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

۳۴

* $y = \underbrace{\text{Arcsin}}_{①\ \text{ds}\sim\alpha}\left(\underbrace{\frac{۲}{x}}_{②\ \sim\alpha}\right)$

$$y' = \frac{۱}{\sqrt{۱-\left(\frac{۲}{x}\right)^۲}} \times \frac{-۲}{x^۲}$$

ت) اگر f از صفر عبور کند و $f(x) = \text{Arcsin}(x - f(x))$ آن‌گاه $f'(۰)$ کدام است؟

صفر ←

$$f(۰) = ۰$$
$$f'(۰) = ؟$$

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-(x-f(x))^۲}} \times ۱ - f'(x)$$

$x = ۰$

$$f'(۰) = \frac{۱ - f'(۰)}{\sqrt{۱-۰}} \rightarrow f'(۰) = ۱ - f'(۰)$$

$$۲f'(۰) = ۱ \rightarrow f'(۰) = \frac{۱}{۲}$$

ت) شیب خط مماس بر منحنی $y = \text{Arcsin}\left(\frac{۱}{x-۴}\right)$ در $x = ۰$ برابر چند است؟

$$y' = \frac{۱}{\sqrt{۱-\left(\frac{۱}{x-۴}\right)^۲}} \times \frac{-۱}{(x-۴)^۲}\Big|_{x=۰} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}} \times -\frac{۱}{۱۶}$$

$$= -\frac{۱}{۴\sqrt{۱۵}}$$

۱) $-\frac{۱}{\sqrt{۱۵}}$
۲) $-\frac{۱}{۲\sqrt{۱۵}}$
۳) $-\frac{۱}{۳\sqrt{۱۵}}$
۴) $-\frac{۱}{۴\sqrt{۱۵}}$

ت) معادله مماس بر نمودار $y = \text{Arcsin}x + \text{Arccos}y + \frac{\pi}{۲}$ در نقطه x به طول $(۰,۰)$ کدام است؟

$$y - \text{Arcsin}x - \text{Arccos}y - \frac{\pi}{۲} = ۰$$

$$y'_x = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}}{۱ - \frac{-۱}{\sqrt{۱-y^۲}}}$$

$(۰,۰)$

$$y'_x = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۱-۰}}{۱+\frac{۱}{\sqrt{۱-۰}}}} = \frac{۱}{۲}$$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ✓
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) ۲
۴) ۴

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

$$y = \log_a u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = a^u \longrightarrow y' = u' a^u \ln a$$

$$y = e^u \longrightarrow y' = u' e^u$$

$$* y = e^{\frac{\cos\sqrt{x}}{u}} \longrightarrow y' = \underbrace{-\sin\sqrt{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'} \times e^{\cos\sqrt{x}}$$

$$* y = \underbrace{\ln(5x^2+1)}_{u} \longrightarrow y' = \frac{10x}{5x^2+1} u'$$

$$* y = \log_a^5 \frac{1}{x} \longrightarrow y' = \frac{\frac{-1}{x^2}u'}{u\frac{1}{x}\frac{\ln 5}{\ln a}} = -\frac{1}{x\ln 5}$$

$$* y = \frac{e^{\sin x}}{e^{2x}} = e^{\frac{\sin x - 2x}{u}}$$

$$\rightarrow y' = \underbrace{(\cos x - 2)}_{u'} e^{\frac{\sin x - 2x}{u}}$$

$$(\cos x - 2)\frac{e^{\sin x}}{e^{2x}}$$

$$* y = 2^{\underbrace{x^2}_{u}} \longrightarrow y' = \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{(2^{x^2})}_{a^u} \frac{\ln 2}{\ln a}$$

$$* y = (2^x)^2 \longrightarrow y = 2^{\underbrace{2x}_{u}} \longrightarrow y' = \underbrace{2}_{u'} \times 2^{2x} \ln 2$$

$$= 2^{2x+1}\ln 2$$

نکته: گاهی ممکن است تابعی که بهمان داده شده، اصل خاصی نباشد

$$* y = e^{2\ln\sin x} = (\sin x)^{2\ln e} = \sin^2 x$$

$$\rightarrow y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

نکته: گاهی اوقات با ساده‌سازی و سپس مشتق‌گیری می‌توان عملیات مشتق‌گیری را آسان‌تر کرد

$$* y = \ln(\sqrt{x^2+9}) = \frac{1}{2}\ln(x^2+9)$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+9} = \frac{x}{x^2+9}$$

$$* y = \ln\left(\frac{x^2\sqrt[3]{x-1}}{(x-2)^3}\right)$$

$$= 2\ln x + \frac{1}{3}\ln(x-1) - 3\ln(x-2)$$

$$\rightarrow y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{3}{x-2}$$

نکته:

$$y = e^u$$
$$\ln y = u$$
$$\frac{y'}{y} = u'$$
$$y' = u'y$$
$$y' = u'e^u$$

https://telegram.me/konkooooriha

https://telegram.me/konkooooriha

نکته: اگر تابعی هم در پایه و هم در توان x داشته باشد (نه تابع نمایی باشد و نه تابع عادل) از دو راه

$$f(x)>0 \qquad y=f(x)^{g(x)}$$

روش ①

استفاده از تابع نمایی $f(x)=e^{\ln f(x)}$ و به دست آوردن مشتق تابع نمایی

$$y=e^{g(x)\ln f(x)}$$

روش ②

نتیجه‌گیری دستاوی $\ln y=g(x)\ln f(x)$ و استفاده از مشتق‌گیری ضمنی

در این روش از طرفین ln می‌گیریم

$$* \quad f(x)=x^{2\sqrt{x}} \qquad x>0$$

روش ①

$$f(x)=e^{2\sqrt{x}\ln x}$$

$$f'(x)=\underbrace{e^{2\sqrt{x}\ln x}}_{f(x)}\left(2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\times\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=x^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$$

$$=x^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x+2}{\sqrt{x}}\right)$$

صفحه ۳۸

$$* \quad y=(x-1)^3(x+2)^5$$

$$\ln y=\ln(x-1)^3(x+2)^5=3\ln(x-1)+5\ln(x+2)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x+2}$$

$$y'=\frac{8x+1}{(x-1)(x+2)}y=\frac{8x+1}{(x-1)(x+2)}(x-1)^3(x+2)^5$$

$$=(8x+1)(x-1)^2(x+2)^4$$

سریع‌تر از روش مشتق‌گیری مستقیم است

$$* \quad y=\frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}$$

$$\ln y=2\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^3-1)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}-\frac{3x^2}{2(x^3-1)}$$

$$y'=\left(\frac{2}{x}-\frac{3x^2}{2(x^3-1)}\right)\times\frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}$$

https://telegram.me/konkooooriha

۲۸ گزینه ۲

روش لگاریتم‌گیری

$$y = x^{2\sqrt{x}} \longrightarrow \ln y = \ln x^{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x$$

$$\longrightarrow \frac{y'}{y} = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}$$

$$\longrightarrow y' = y\,\frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}} = x^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}\right)$$

* $y = (2x)^{x} \qquad x > 0$

روش سوم

$$\ln y = \ln (2x)^{x}$$

$$\ln y = x \ln 2x \longrightarrow \frac{y'}{y} = \ln 2x + \frac{1}{x} \times x$$

$$y' = (\ln 2x + 1)\,y$$

$$y' = (\ln 2x + 1)(2x)^{x}$$

بررسی حدث:

$x = \pi$ کدام است؟ $y = e^{\sin x}$ شیب خط مماس بر منحنی

$$y' = e^{\sin x} \times \cos x\Big|_{x=\pi} = e^{0} \times \cos\pi = 1 \times -1 = -1$$

(۱) -1 ✓

(۲) 1

(۳) e

(۴) $\frac{1}{e}$

$f(x) = \frac{\ln x^{2} + 1}{1 - \ln x}$ حاصل $\left(\frac{f(\sqrt[3]{e})}{f'(\sqrt[3]{e})}\right)^{3}$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{2\ln x + 1}{-\ln x + 1}$$

$\ln x = u$

$$f'(x) = \frac{2 + 1}{(1 - \ln x)^{2}} \times \frac{1}{x} \rightsquigarrow f'(\sqrt[3]{e}) = \frac{3}{(1 - \frac{1}{3})^{2}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{e}} = \frac{9}{\sqrt[3]{e}}$$

$$f(\sqrt[3]{e}) = \frac{1 + 1}{\frac{2}{3}} = 3$$

$$\left(\frac{f(\sqrt[3]{e})}{f'(\sqrt[3]{e})}\right)^{3} = \left(\frac{3\sqrt[3]{e}}{3}\right)^{3} = \frac{e}{27}$$ ✓

(۱) $\frac{e}{27}$

(۲) $\frac{27}{e}$

(۳) e

(۴) $\frac{1}{e}$

مقدار مشتق تابع $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+2}}\right)$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

$$f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{2x-1}\right) - \ln\left(\sqrt[3]{x+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln(2x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$\longrightarrow f'(1) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$$ ✓

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{5}{9}$

(۳) $\frac{7}{9}$

(۴) $\frac{4}{3}$

مشتق تابع $f(x)$ نسبت به $g(x)$

$$\text{مشتق تابع } f(x) \text{ نسبت به } g(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال: مشتق تابع $y=2x^3+3x^2+6x-1$ نسبت به x^2 کدام است؟

$$\text{جواب} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{6x^2+6x+6}{2x} = 3x+3+\frac{3}{x}$$

مثال: مشتق تابع $y=x^4+x^3$ نسبت به x^3 کدام است؟

$$\text{جواب} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x^3+3x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}x+1$$

مثال: مشتق $y=x^4+x^3$ را نسبت به صفر $x\sin x$ به دست آورید.

$$\text{جواب} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x^3+3x^2}{\sin x+x\cos x}$$

https://telegram.me/konkooooriha

مشتق مراتب بالاتر

$y \to y' \to y'' \to y''' \to y^{(4)} \to \cdots \to y^{(n)}$

اگر بخواهیم عادی بخواهیم مشتق گیری را تا ۱۱ یا ۱۲ بار انجام دهیم، با همان مشتق گیری عادی که تا حالا یاد گرفتیم خیلی وقت گیر می‌شود.

پس چه کنیم؟

از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

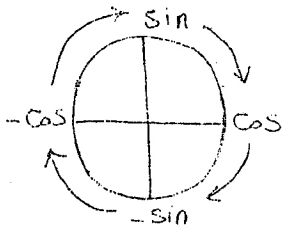
(۱) در صورت توابع مثلثی داریم:

$y = A\sin ax \longrightarrow y^{(n)} = Aa^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$

$y = A\cos ax \longrightarrow y^{(n)} = Aa^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$

حفظ فرمول ممنوع!!!

تکنیک حل مثالی:



* در حین مشتق گیری هر ۴ مرتبه یک بار با احتیاط ضریب به عامل اول برمی‌گردیم

مثال: $y = \sin 4x \longrightarrow y^{(19)} = 4^{19} \times -\cos 4x = -4^{19}\cos 4x$

$y = 3\cos 9x \longrightarrow y^{(19)} = 3 \times 9^{18} \times -\cos 9x$

$-9^{18}\cos 9x = -3 \times 9^{17}\cos 9x = -3 \times 9^{17}\cos 9x$

مثال: مشتق مرتبه هفدهم تابع $y = 2\cos 4x$ در $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

$y^{(17)} = 2 \times 4^{17} \times -\sin 4x = -2 \times 4^{17}\sin 4x$

$= -2 \times 2^{34}\sin 4x$

$= -2^{35}\sin 4x\Big|_{x=\frac{\pi}{8}} = -2^{35}$

مثال: مقدار مشتق مرتبه هفدهم تابع زیر در $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

$y = \frac{\tan x - \tan^3 x}{(1+\tan^2 x)^2}$

اول ساده سپس مشتق بگیر

$y = \frac{\tan x(1-\tan^2 x)}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x)} \cos 2x$

$= \frac{\sin 2x}{2}\cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$

$y^{(17)} = \frac{1}{4} \times 4^{17} \times \cos 4x\Big|_{x=\frac{\pi}{24}} = 4^{16}\cos\frac{\pi}{6} = 4^{16}\frac{\sqrt{3}}{2}$

https://telegram.me/konkooooriha

مثال: مشتق مرتبه ۲۱ ام تابع $y=\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$ کدام است؟

اول ساده سپس مشتق بگیر

$$y=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}$$

$$\sin x+\cos x$$

$$y^{(21)}=\cos x-\sin x$$

مثال: مشتق مرتبه صفر تابع $y=4\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos 2x$ کدام است؟

اول ساده سپس مشتق بگیر

$$y=\underbrace{4\sin x\cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x}\cos^2 2x=2\sin 2x\cos^2 2x=\sin 4x$$

$$y^{(10)}=4^{10}\sin 4x=-4^{10}\sin 4x$$

مثال مشتق مرتبه پنجم تابع زیر در $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$f(x)=2\sin 3x\cos x$$ اول ساده سپس مشتق بگیر

نکته: $\sin P\sin Q=\frac{1}{2}\left(\sin(\underbrace{P+Q}_{\text{مجموع}})+\sin(\underbrace{P-Q}_{\text{تفاضل}})\right)$

$$f(x)=\sin 4x+\sin 2x$$

$$f^{(5)}(x)=4^5\cos 4x+2^5\cos 2x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-4^5$$

مثال: مشتق مرتبه یازدهم تابع زیر در $x=0$ کدام است؟

$$f(x)=4\sin x\cos^2 x$$

اول ساده سپس مشتق بگیر

$$f(x)=2\underbrace{(2\sin x\cos x)}_{\sin 2x}\cos x$$

$$\sin 2x+\sin x$$

$$f^{(11)}(x)=-3^{11}\cos 3x-\cos x\Big|_{x=0}=-3^{11}-1$$

مثال: اگر $f(x)=2\cos^2 x$ باشد، مقدار $f^{(17)}(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

اول ساده سپس مشتق بگیر

$$f(x)=2\cos^2 x-1+1=\cos 2x+1$$

$$f^{(17)}(\frac{\pi}{12})=-2^{17}\sin 2x\Big|_{x=\frac{\pi}{12}}=-2^{17}\times\frac{1}{2}=-2^{16}$$

https://telegram.me/konkooooriha

مثال: اگر $y=\sin x+\cos x$ باشد حاصل $(y^{(9)})^2+y^2$ کدام است؟

$y^{(9)}=\cos x-\sin x$

$\rightarrow =\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x$

$=1+1$

$=2$ ✓

مثال: مشتق مرتبه‌ی صدم تابع $y=2\cos^2 3x$ در $x=\frac{\pi}{9}$ کدام است؟

$y'=2\times 2\cos 3x\times(-\sin 3x)\times 3$

$=-9\sin 6x$

$y^{(100)}=-9\times 6^{99}\times(-\cos 6x)=9\times 6^{99}\cos 6x\Big|_{x=\frac{\pi}{9}}$

$=-9\times 6^{99}$

-9×6^{99}

$\downarrow$

$-3^2\times 2^{99}$

$=-3^{101}\times 2^{99}$ ✓

مثال: مشتق مرتبه‌ی نوزدهم تابع $y=\sin^2 x$ در $x=\frac{\pi}{8}$ کدام است؟

$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

۱۸ بار مشتق بگیر

$y^{(19)}=-2^{18}\sin 2x\Big|_{x=\frac{\pi}{8}}=-2^{18}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\sqrt{2}\times 2^{17}\rightsquigarrow(\sqrt{2})^{34}$

$=-(\sqrt{2})^{35}$ ✓

مثال: مشتق مرتبه‌ی سی‌وسوم تابع $y=\frac{\tan^2 5x}{1+\tan^2 5x}$ در $x=\frac{\pi}{20}$ کدام است؟

اول ساده کن بعد مشتق بگیر

$y=\frac{\sin^2 5x}{\cos^2 5x}\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}=\sin^2 5x$

$\downarrow$

$y'=2\sin 5x\cos 5x\times 5$

$=5\sin 10x$

$y=5\times 10^{32}\sin 10x\Big|_{x=\frac{\pi}{20}}=5\times 10^{32}=5^{33}\times 2^{32}$ ✓

https://telegram.me/konkooooriha

$$y=x^n \longrightarrow y^{(n)}=n!$$

$$y=(ax+b)^n \longrightarrow y^{(n)}=a^n \times n!$$

نکته: در توابع $y=x^n+\cdots$ اولین مشتق غیرصفر موجود که یک عدد است مشتق مرتبه n ام است.

نکته: در توابع چند جمله‌ای که توان آن‌ها اعداد صحیح ⊕ است اگر مرتبه مشتق بیشتر از توان باشد، مشتق آن‌ها صفر است.

مثال:

$y=x^{10} \rightsquigarrow y^{(10)}=10!$ ✓

$y=2x^4 \rightsquigarrow y^{(4)}=2\times 4!$ ✓

$y=(5x+9)^7 \rightsquigarrow y^{(7)}=5^7\times 7!$ ✓

$y=2(3x-1)^4 \rightsquigarrow y^{(4)}=2\times 3^4\times 4!$ ✓

$y=x^7+2x^4-3x^2+x+10 \rightsquigarrow y^{(7)}=7!$ ✓

مرتبه مشتق ۷ است ← قوی‌ترین جمله‌ی این عبارت دارای مرتبه کمتر از ۷ با مشتق‌گیری تقسیری جمله‌ای که دارای مرتبه کمتر از ۷ هستند از بین می‌رود

مثال: اگر $f(x)=(x+1)^3(3x^2+5)^4(x-1)^4$ باشد، $f^{(12)}(x)$ کدام است؟

بزرگ‌ترین جمله‌ی عبارت ← $f(x)=(x^3)(3x^2)^4(x)+\cdots=3^4x^{12}+\cdots$

راشنالی می‌کنیم

قوی‌ترین جمله‌ی این عبارت دارای مرتبه ۱۲ است پس با ۱۲ بار مشتق‌گیری بقیه‌ی جملات که دارای مرتبه کمتر از ۱۲ هستند از بین می‌روند

$f^{(12)}(x)=3^4\times 12!$ ✓

مثال: مشتق مرتبه هشتم تابع $f(x)=(2x-1)^{10}$ در $x=1$ کدام است؟

$$f^{(8)}(x)=10\times 9\times 8\times\cdots\times 3\times(2x-1)^2\times 2^8\Big|_{x=1}$$

$$=\frac{10\times 9\times 8\times\cdots\times 3\times 2\times 1\times 2^7}{10!}$$

$$=10!\times 2^7$$ ✓

https://telegram.me/konkooooriha

مثال: اگر $f(x)=\frac{3x+4}{x^2+2x}$ باشد، مشتق مرتبه دوازدهم در $x=1$ کدام است؟

تکنیک پوشش: ما هوسایدر این کار حرفی برم:

$f(x)=\frac{3x+4}{x(x+2)}$

$\hookrightarrow f(x)=\frac{A}{x}^{2}+\frac{B}{x+2}^{1}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}=2x^{-1}+(x+2)^{-1}$

$f^{(12)}(x)=2(-1)(-2)\cdots(-12)x^{\overset{+1}{\leftarrow}-13}+(-1)(-2)\cdots(-12)(x+2)^{\overset{+1}{\leftarrow}-13}\Big|_{x=1}$

$=2\times12!\times1+12!\times3^{-13}$

$=\boxed{12!\left(2+\frac{1}{3^{12}}\right)}$ ✓

مثال: اگر $y=\frac{-x-11}{x^2+2x-3}$ باشد، مشتق مرتبه دهم در $x=0$ کدام است؟

$y=\frac{-x-11}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}^{3}+\frac{B}{x+3}^{2}=3(x-1)^{-1}+2(x+3)^{-1}$

$y^{(10)}=-3\times-1\times-2\cdots-10(x-1)^{\overset{+1}{\leftarrow}-11}+2\times-1\times-2\cdots-10(x+3)^{\overset{+1}{\leftarrow}-11}$

$=\boxed{10!\left(-3+\frac{2}{3^{11}}\right)}=(-3\times10!\times-1)+(2\times10!\times\frac{1}{3^{11}})$

مثال: مقدار مشتق چهاردهم تابع $y=(4x-3)^{-4}$ کدام است؟

$y^{(14)}=-9\times-7\times-5\times\cdots\times-19\times(4x-3)^{\overset{+1}{\leftarrow}-20}\times4^{14}$

$=(-1)^{14}\times\frac{19!}{5!}\times(4x-3)^{-20}\times4^{14}\Big|_{x=1}$ ← برسد به مشتق

$=1\times\frac{19!}{5!}\times1\times4^{14}=\boxed{\frac{19!}{5!}\times4^{14}}$ ✓

مثال: مقدار مشتق سی‌ام تابع $y=\frac{1}{(4x-3)^2}$ در $x=\frac{2}{3}$ کدام است؟

$=(4x-3)^{-2}$

$y^{(30)}=-2\times-3\times-4\times\cdots\times-31\times(4x-3)^{\overset{+1}{\leftarrow}-32}\times4^{30}$

$=(-1)^{30}\times31!\times(4x-3)^{-32}\times4^{30}\Big|_{x=\frac{2}{3}}$ ← برسد به مشتق

$=1\times31!\times1\times4^{30}$

$=\boxed{4^{30}\times31!}$

https://telegram.me/konkooooriha

$f^{(10)}(x) = 0 - 11\times(-1)(-2)\cdots(-10)(x-1)^{-11}$ (+1)

$= -11\times 10!\times(x-1)^{-11}\Big|_{x=0} = -11!$ ✓

مثال: اگر $y=(x^3+x)^5$ باشد، مقدار $y^{(13)}$ را در $x=1$ می‌یابید؟

$y=(x^3)^5 + 5(x^3)^4(x) + \cdots$

$= x^{15} + 5x^{13} + \cdots$

چون ترتیب توان‌ها ... و 11 و 13 و 15 است که ما 13 را داریم

$y^{(13)} = (15)(14)\cdots(3)x^2 + 5\times 13!$ (+1)

$= \frac{15!}{2!}x^2 + 5\times 13!\Big|_{x=1} = \frac{15!}{2} + 5(13!)$

مثال: اگر $f(x)=(x^2+3x+1)^9 + (x^5 - 4x^3 + 2x + 1) - \frac{2}{x}$ باشد، مشتق بستم تابع در $x=1$ کدام است؟

(x^{-1} : $-2x^{-1}$ ، 3 : x^3)

توان بزرگ‌ترین جمله: 18 — توان بزرگ‌ترین جمله: 15

$f^{(20)}(x) = 0 + 0 - 2(-1)(-2)\cdots(-20)x^{-21}\Big|_{x=1} = -2\times 20!$ ✓

مثال: مشتق مرتبه صحیح تابع $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+4x+4}$ در $x=0$ کدام است؟

$f(x) = 1 - \frac{3}{(x+2)^2} = 1 - 3(x+2)^{-2}$

$f^{(100)}(x) = -3(-2)(-3)(-4)\cdots(-101)(x+2)^{-102}$ (+1)

$= -3\times 101!\times(-1)^{100}\times 2^{-102}\Big|_{x=0}$

$-\frac{3\times 101!}{2^{102}}$ ✓

مثال: مشتق مرتبه صحیح دهم تابع زیر در $x=0$ کدام است؟

$y = \frac{x^{10} + 2x^9 + 5x^3 + 3}{x-1}$

در چنین حالتی صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$y = \underbrace{(x^9 + \cdots)}_{\text{خارج قسمت}} + \underbrace{\frac{11}{x-1}}_{\text{باقی‌مانده}} \rightarrow 11(x-1)^{-1}$

$\text{مقدار صورت} = \text{باقی‌مانده}$ ، $11 = \text{مقدار صورت}\Big|_{x=1}$

https://telegram.me/konkooooriha

روش ③

در مورد توابع هموگرافیک مشتق مرتبه n ام به صورت زیر است:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow y^{(n)}=\frac{(ad-bc)\times n!\times(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$$

$$y^{(100)}=\frac{(-10)\times 100!\times(-1)^{99}}{(x-2)^{101}}\Big|_{x=2}=\boxed{-10\times 100!}\ \checkmark$$

نکته: اگر مشتق n ام تابعی از هیچ روش قبلی حل نشد با چند بار مشتق گیری روند به دست می آید

مثال: مشتق مرتبه صد ام تابع $y=xe^x$ در $x=1$ کدام است؟

$$y^{(1)}=1\times e^x+e^x\times x=e^x(1+x)$$

$$y^{(2)}=e^x(1+x)+1\times e^x=e^x(2+x)$$

$$y^{(3)}=e^x(2+x)+1\times e^x=e^x(3+x)$$

$$\vdots$$

$$y^{(100)}=e^x(100+x)\Big|_{x=1}=e\times 101=\boxed{101e}\ \checkmark$$

مثال: مشتق مرتبه صد ام تابع $y=\frac{2x+4}{x-3}$ در $x=2$ کدام است؟

روش ①

$$y=\frac{2x+4}{x-3}\xrightarrow{\text{تابع هموگرافیک}}y'=\frac{-10}{(x-3)^2}=-10(x-3)^{-2}$$

$$\xrightarrow{\text{99 بار مشتق}}y^{(100)}=-10\times(-2)(-3)\cdots(-100)(x-3)^{-101}\Big|_{x=2}$$

$$=-1\times 99!\times(-1)^{99}\times 100!\times 10$$

$$=\boxed{-10\times 100!}\ \checkmark$$

روش ②

خرج را در صورت ظاهری کنیم

$$y=\frac{2(x-3)+10}{x-3}=2+\frac{10}{x-3}\rightarrow 10(x-3)^{-1}$$

$$y^{(100)}=+10\times-1\times-2\times\cdots\times-100\times(x-3)^{-101}\Big|_{x=2}$$

$$=+10\times 100!\times-1=\boxed{-10\times 100!}\ \checkmark$$

https://telegram.me/konkooooriha

عامل صفرشونده در مشتقات مراتب بالاتر:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای عامل صفرشونده‌ی از مرتبه‌ی n باشد برای یافتن مشتق مرتبه‌ی n ام تابع در $x=a$ کافی است تنها از عامل مزبور n بار مشتق بگیریم و در بقیه‌ی عوامل ضرب کنیم.

مثال: مشتق مرتبه‌ی پنجم و چهارم تابع $f(x)=(x-\frac{\pi}{6})^{10}\sin\frac{x}{2}$ را در $x=\frac{\pi}{3}$ بیابید!

عامل صفرشونده

دو بار از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم

$$f(\tfrac{\pi}{6})=f'(\tfrac{\pi}{6})=f''(\tfrac{\pi}{6})=\cdots=f^{(9)}(\tfrac{\pi}{6})=0 \longrightarrow f^{(5)}(\tfrac{\pi}{6})=0$$

$$f^{(10)}(\tfrac{\pi}{6})=1^{10}\times 10!\times\sin\frac{x}{2}\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=10!\times\frac{1}{2}=\frac{10!}{2}$$

مثال: $y=\underbrace{(2x-1)^2}_{\text{عامل صفرشونده}}\sqrt{x^2+4x}$ $\qquad y''(\frac{1}{2})=?$

دو بار از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم

$$y''=2^2\times 2!\times\sqrt{x^2+4x}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=8\times\sqrt{\frac{1}{4}+2}=8\times\frac{3}{2}=12$$

مثال: $y=\underbrace{(3x-1)^4}_{\text{عامل صفرشونده}}\sqrt{x^2-x+1}$ $\qquad y^{(4)}(\frac{1}{3})=?$

چهار بار از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم

$$y^{(4)}=3^4\times 4!\times\sqrt{x^2-x+1}\Big|_{x=\frac{1}{3}}=3^4\times 4!\times\frac{\sqrt{7}}{3}=648\sqrt{7}$$

صفحه ۴۸

مثال: مشتق مرتبه‌ی صدم تابع $y=\ln(x+5)$ در $x=-4$ کدام است؟

$$y'=\frac{1}{x+5}=(x+5)^{-1}\xrightarrow{\text{۹۹ بار مشتق می‌گیریم}}y^{(100)}=-1\times-2\times-3\times\cdots\times-99\times(x+5)^{+1}$$

$$=-99!\times 1=-99!$$

مثال: مشتق مرتبه‌ی سوم تابع f در همسایگی $x=1$ مفروض است. مشتق سوم تابع $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{x^5-x^3+x-1}{x-1}\right)^{10} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ کدام است؟

$$f(x)=\left(\frac{x^5-x^3+x-1}{x-1}\right)^{10}=\left(\frac{x^3(x-1)+(x-1)}{x-1}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{(x-1)(x^3+1)}{x-1}\right)^{10}=(x^3+1)^{10}$$

$$\longrightarrow f(x)=x^{30}+\cdots$$

جمله‌ی بعدی کمتر از ۳۰

مشتق سوم همه‌ی این‌ها صفر است چون درجه‌ی همگی از ۳۰ کمتر است

جواب $=30!$

https://telegram.me/konkooooriha

عامل صفرشونده در مشتقات مراتب بالاتر:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای عامل صفرشونده‌ی از مرتبه‌ی n باشد برای یافتن مشتق مرتبه‌ی n ام تابع در $x=a$ کافی است تنها از عامل مزبور n بار مشتق بگیریم و در بقیه‌ی عوامل ضرب کنیم.

مثال: مشتق مرتبه‌ی پنجم از $f(x)=(x-\frac{\pi}{6})^{10}\sin\frac{x}{2}$ را در $x=\frac{\pi}{3}$ بیابید.

عامل صفرشونده

حداقل از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم

$$f(\tfrac{\pi}{6})=f'(\tfrac{\pi}{6})=f''(\tfrac{\pi}{6})=\cdots=f^{(9)}(\tfrac{\pi}{6})=0 \longrightarrow f^{(5)}(\tfrac{\pi}{6})=0$$

$$f^{(10)}(\tfrac{\pi}{6})=1^{10}\times 10!\times\sin\frac{x}{2}\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=10!\times\frac{1}{2}=\frac{10!}{2}$$ ✓

مثال: $y=\underbrace{(2x-1)}_{\text{عامل صفرشونده}}\sqrt[2]{x^2+4x}$ $\qquad y''(\frac{1}{2})=?$

دو بار از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم

$$y''=2\times 2\times 1\times\sqrt{x^2+4x}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=8\times\sqrt{\tfrac{1}{4}+2}=8\times\frac{3}{2}=12$$ ✓

مثال: $y=\underbrace{(3x-1)^4}_{\text{عامل صفرشونده}}\sqrt{x^2-x+1}$ $\qquad y^{(4)}(\frac{1}{3})=?$

چهار بار از عامل صفرشونده مشتق می‌گیریم

$$y^{(4)}=3^4\times 4!\times\sqrt{x^2-x+1}\Big|_{x=\frac{1}{3}}=3^4\times 4!\times\frac{\sqrt{7}}{3}=216\sqrt{7}$$ ✓

صفحه ۴۸

مثال: مشتق مرتبه‌ی صدم تابع $y=\ln(x+5)$ در $x=-4$ کدام است؟

$$y'=\frac{1}{x+5}=(x+5)^{-1}$$

$$y^{(100)}=-1\times-2\times-2\times\cdots\times-99\times(x+5)^{-100}$$

$$=-99!\times 1=-99!$$ ✓

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{x^4-x^3+x-1}{x-1}\right)^{10} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ مفروض است. مشتق سی‌ام تابع f در همسایگی $x=1$ کدام است؟

$$f(x)=\left(\frac{x^4-x^3+x-1}{x-1}\right)^{10}=\left(\frac{x^3(x-1)+(x-1)}{x-1}\right)^{10}$$

$$\left(\frac{(x-1)(x^3+1)}{x-1}\right)^{10}=(x^3+1)^{10}$$

$$\longrightarrow f(x)=x^{30}+\cdots$$

چون درجه‌ی بالاترین جمله کمتر از ۳۰ است مشتق سی‌ام همه‌ی این‌ها صفر است

جواب $=30!$ ✓

https://telegram.me/konkooooriha

* $f(x)=x^2|x|-2|x-3|+4$

$f'(2)=?$

می‌توانیم از هر یک از عبارت‌ها جداجدا مانند قبل را مشتق بگیریم:

$f(x)=x^3+2x-6+4$

$f'(x)=3x^2+2$

$f'(2)=14$ ✓

* $f(x)=|x-4|+|3x-2|$

$x=\frac{2}{3}$ مقدار مشتق چپ تابع در نقطه‌ی $=?$

$f(x)=-x+4-3x+2=-4x+6$

$f'(x)=-4 \longrightarrow f'_-(\frac{2}{3})=-4$ ✓

* $y=|x^2-1|+|x^2-2|+\cdots+|x^2-10|$

$y'(\frac{3}{2})=?$

$y'=2x+2x+(-2x)+\cdots+(-2x)$

$=12x+8(-2x)=-12x$

$y'(\frac{3}{2})=-18$ ✓

https://telegram.me/konkooooriha

* $f(x)=|x+1||x+2||x+3|+|x+2||x+3|\left|x+\frac{7}{2}\right|$

مشتق چپ در $x=-3$ $=?$

$f(x)=|x+3|\left(|x+1||x+2|+|x+2|\left|x+\frac{7}{2}\right|\right)$

$f'_-(-3)=-1\times 3=-3$ ✓

* $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2+2x+4}$ $\qquad f'_-(1)=?$

$f(x)=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2+2x+4}=\frac{|x-1|}{x^2+2x+4}$

$f'_-(1)=-1\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$ ✓

* $f(x)=(x-2)^2\sqrt{1-\cos^2 x}$

مشتق چپ در $x=0$ $=?$

$f(x)=(x-2)^2\sqrt{\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}}=(x-2)^2|\sin x|$

$=(x-2)^2|x|$

$f'_-(0)=4x-1=-4$ ✓

* $f(x)=\sqrt{x^2+x^4}$ $\qquad f'_+(0)-f'_-(0)=?$

$f(x)=|x|\sqrt{1+x^2}$ $\qquad |1\times 1|=1$ $\qquad |1\times -1|=-1$

$1-(-1)=2$ ✓

https://telegram.me/konkooooriha

صفحه ۵۰

* $f(x)=x^2|x|-2|x-3|+4$

$f'(2)=?$

می‌توانیم از هر یک از عبارات داخل قدر مطلق را بگیریم:

$f(x)=x^3+2x-6+4$

$f'(x)=3x^2+2$

$f'(2)=14$ ✓

* $f(x)=|x-4|+|3x-2|$

$x=\frac{2}{3}$ مقدار مشتق چپ تابع در نقطه‌ی $=?$

$f(x)=-x+4-3x+2=-4x+6$

$f'(x)=-4 \longrightarrow f'_-(\frac{2}{3})=-4$ ✓

* $y=|x^2-1|+|x^2-2|+\cdots+|x^2-10|$

$y'(\frac{3}{2})=?$

$y'=2x+2x+(-2x)+\cdots+(-2x)$

$=$

$6x+8(-2x)=-12x$

$y'(\frac{3}{2})=-18$ ✓

* $f(x)=|x+1||x+2||x+3|+|x+4||x+5||x+6|$

$x=-2$ در 0 مشتق چپ $=?$

$f(x)=|x+3|\left(|x+1||x+2|+|x+4||x+6|\right)$

$f'_-(-3)=-1\times 3=-3$ ✓

* $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2+2x+4}$ $\qquad f'_-(1)=?$

$f(x)=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2+2x+4}=\frac{|x-1|}{x^2+2x+4}$

$f'_-(1)=-1\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$ ✓

* $f(x)=(x-2)^2\sqrt{1-\cos^2 x}$

$x=0$ در 0 مشتق $=?$

$f(x)=(x-2)^2\sqrt{\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}}=(x-2)^2|\sin x|$

$=$

$(x-2)^2|x|$

$f'_-(0)=4x-1=-4$ ✓

* $f(x)=\sqrt{x^2+x^4}$ $\qquad f'_+(0)-f'_-(0)=?$

$f(x)=|x|\sqrt{1+x^2}$ $\qquad 1\times 1=1$ $\qquad 1\times -1=-1$

$1-(-1)=2$ ✓

https://telegram.me/konkooooriha